数学C　解法のテクニック

【2次曲線】

1. 楕円：2つの焦点からの距離の和が一定の点の集合

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)\qquad \text{焦点}\ F\left(\sqrt{a^2-b^2},0\right), F'\left(-\sqrt{a^2-b^2},0\right)$$

楕円上の点の座標：$(a\cos\theta, b\sin\theta)$

楕円で囲まれた面積 πab

2. 双曲線：2つの焦点からの距離の差が一定の点の集合

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)\qquad \text{焦点}\ F\left(\sqrt{a^2+b^2},0\right), F'\left(-\sqrt{a^2+b^2},0\right)$$

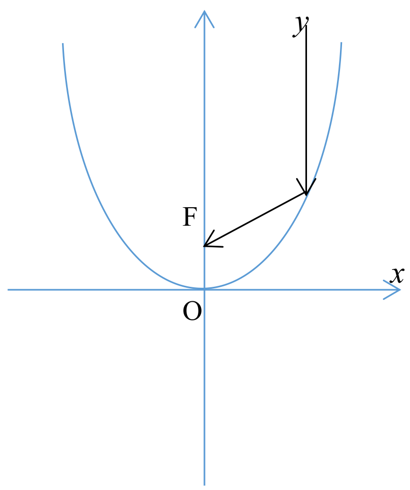
漸近線：$y=\pm\frac{b}{a}x$

3. 放物線：垂直方向の降下物が曲線で跳ね返って1つの焦点に当たる

$$y=a^2x^2\qquad F\left(0,\frac{1}{4a^2}\right)$$

［証明］

$$y=Ax^2(A>0)$$
$$y'=2Ax$$



図より

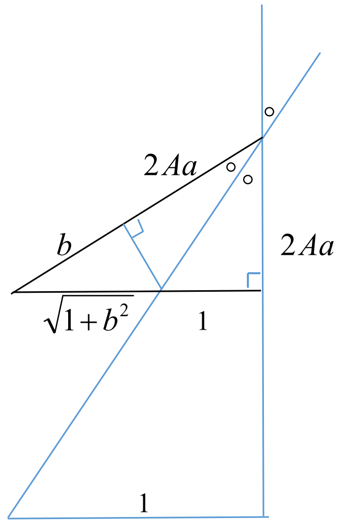
$$(2Aa+b)^2=(2Aa)^2+\left(\sqrt{1+b^2}+1\right)^2$$
$$4Aab+b^2=1+b^2+1+2\sqrt{1+b^2}$$
$$4Aab-2=2\sqrt{1+b^2}$$
$$2Aab-1=\sqrt{1+b^2}$$
$$4A^2a^2b^2-4Aab+1=1+b^2$$
$$4A^2a^2b-4Aa=b$$

$$b=\frac{4Aa}{4A^2a^2-1}$$

$$\frac{2Aa}{\sqrt{\left(\frac{4Aa}{4A^2a^2-1}\right)^2+1}+1}$$

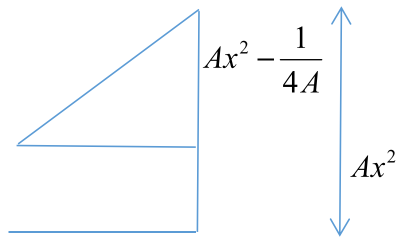
$$=\frac{2Aa\left(4A^2a^2-1\right)}{\sqrt{(4Aa)^2+\left(4A^2a^2-1\right)^2}+4A^2a^2-1}$$

$$=\frac{2Aa\left(4A^2a^2-1\right)}{\sqrt{\left(4A^2a^2+1\right)^2}+4A^2a^2-1}$$



$$=\frac{2Aa\left(4A^2a^2-1\right)}{4A^2a^2+1+4A^2a^2-1}=\frac{2Aa\left(4A^2a^2-1\right)}{8A^2a^2}=\frac{4A^2a^2-1}{4Aa}=\frac{Aa^2-\frac{1}{4A}}{a}=\frac{Ax^2-\frac{1}{4A}}{x}$$

$$Ax^2-\left(Ax^2-\frac{1}{4A}\right)=\frac{1}{4A}$$

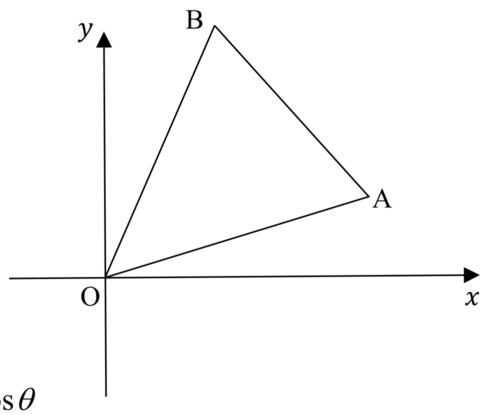


【極座標】

三角形 OAB の公式

余弦定理より：$AB^2=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_2)}$

三角形 OAB の面積： $S=\frac{1}{2}\left|r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)\right|$



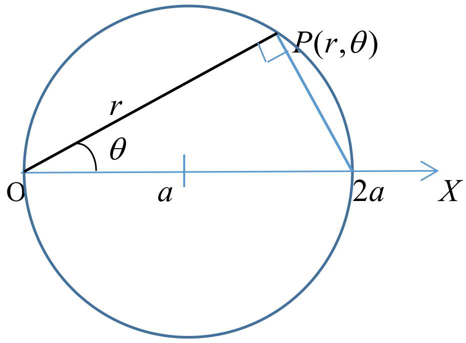
$$x=\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=r\cos\theta$$

$$y=\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=r\sin\theta$$

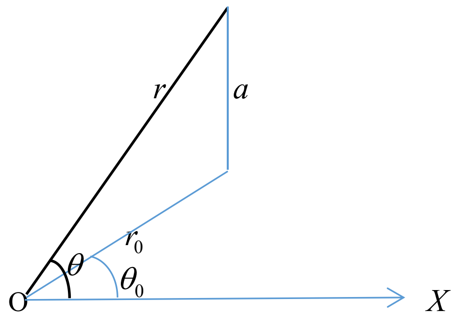
円，直線の極方程式

1.　中心が極 O，半径 1 の円：$r = a$

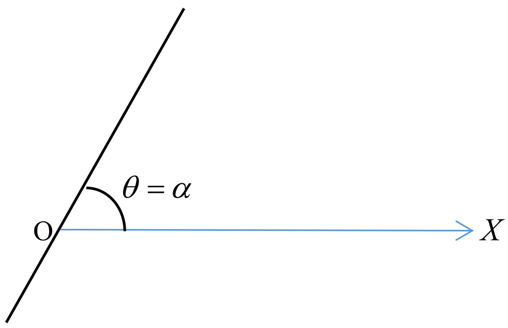
2.　中心が $(a,0)$ 半径 a の円：$r = 2a\cos\theta$



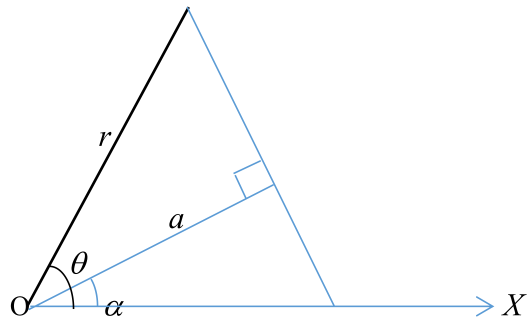
3.中心が (r_0,θ_0)，半径 a の円　：$a^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\theta-\theta_0)$



4.極 O を通り始線と α の角をなす直線：$\theta = \alpha$



5.点 $A(a,\alpha)$ を通り，OA の垂直な直線: $r\cos(\theta-\alpha)=a$



【1 次変換】

1. 1 次変換による直線の像の求め方

①直線上の異なる 2 点 A，B の像 A’，B’ を求める。

［１］A’，B’ が異なるとき，直線 AB は直線 A’B’ に移される。

［２］A’，B’ が同一点のとき，直線 AB は 1 点 A’ に移される。

②直線上の 1 点の像と方向ベクトル $\vec{u}$ の像 $\vec{u}'$ を求める。

［１］ $\vec{u}'\neq\vec{0}$ のとき直線に移る。

［２］ $\vec{u}'=\vec{0}$ のとき 1 点に移る。

③媒介変数表示を利用する。

$x=x(t), y=y(t)$ から　$x'=pt+h, y'=qt+k$ を求め

$p\neq 0$ または $q\neq 0$ なら直線。 $p=q=0$ のとき 1 点に移る。

④逆行列を利用

直線 $ax+by=p$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$ これを $ax+by=p$ に代入。

2.1 次変換と図形の面積

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換によって図形を変換すると，その面積は $|ad-bc|$ 倍になる。

$ad-bc=0$ →点や直線に移される。