(問題１０１)
正n角形の３つの頂点を結んでできる三角形のうち,この正n角形と辺を共有しないものの個数が $7n$であるという。nの値を求めよ。

(問題１０２)
nを２以上の自然数とし，整式x^nを$x^2-6x-12$で割った余りを$a_n x+b_n$とする。
(1) a_2,b_2を求めよ。
(2) a_{n+1},b_{n+1}をa_nとb_nを用いて表せ。
(3) 各nに対して，a_nとb_nの公約数で素数となるものを全て求めよ。

(問題１０３)
$x+y+z=4, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$ を満たす整数解は何個あるか。

(問題１０４)
6 個の数字 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 を用いて 4 桁の数を作る。同じ数字を繰り返し使ってもよいとすると、この 4 桁の数はいくつできるか。

(問題１０５)
(1) 8 人を 2 人ずつ 4 つの組 A,B,C,D に分けるときの分け方は何通りあるか。
(2) 8 人を 2 人ずつ 4 つの組に分けるときの分け方は何通りあるか。

(問題１０６)
(1) 5 人で 1 回ジャンケンをして、１人だけが勝ち残る確率を求めよ。
(2) 6 人で 1 回ジャンケンをして、２人だけが勝ち残る確率を求めよ。

(問題１０７)
数直線上の動点 A の最初の位置を原点とする。さいころを投げて、奇数の目が出たときは-1、偶数の目が出たときは$+1$、A を動かすとする。8 回さいころを投げたときの A の座標をXとして，次の問いに答えよ。
(1) $X=n$となる確率を求めよ。
(2) １回目で A が$+1$ に動き、$X=4$ となる確率を求めよ。

(問題１０８)
(1) 6 人を 3 つの群に分ける方法は何通りあるか。
(2) 6 人を 3 つの群に分けるのに特定の 2 人が同じ組に入る方法は何通りあるか。

(問題１０９)

実数αについて$[\alpha]$はαを超えない最大の整数とする。

既約分数$\frac{p}{q}(0<p<q)$について，数列$\{a_n\}(0\leq a_n<1)$を

$$a_n=\frac{np}{q}-\left[\frac{np}{q}\right], n=1,2,3,\cdots$$

とおく。

(1) $n-m$がqで割り切れるとき，$a_n=a_m$を示せ。

(2) $a_1,a_2,\cdots,a_q$は相異なるq個の数であって、更に

$$a_1+a_2+\cdots+a_q=\frac{q-1}{2}$$

を示せ。

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$を求めよ。

(問題１１０)

方程式$(x^2+2x-2)e^{-x}+a=0$ の解の個数を求めよ。

(問題１１１)

数列$\{a_n\}$が$a_1=p, a_2=q, 2a_{n+2}=(r+2)a_{n+1}-ra_n$ を満たすとき

(1) 数列$\{a_n\}$を求めよ。

(2) $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

(問題１１２)

$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$とするとき

(1) $A=cE+N, N^2=O$を満たす実数cと行列Nを求めよ。ただしOは零行列を表す。

(2) A^nを求めよ。ただし、nは正の整数とする。

(問題１１３)

三角形 ABC において

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=x,\quad \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=y,\quad \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=z \text{ とおく。}$$

(1) 各辺の長さをx,y,zを用いて表せ。

(2) $xy+yz+zx>0$ を証明せよ。

(問題１１4)

不等式$x^4+5x^3+2x^2-11x+3\leq 0$ を満たすようなxの最大値と最小値を求めよ

(問題１１５)

$f(x)=x^3-2x^2-x+2$，　$g(x)=f\left(f\left(f(x)\right)\right)$とする。このとき，整式$g(x)$は$f(x)$で割り切れることを証明せよ。

(問題１１６）

$$\text{不等式}x<\sqrt{4-x^2}-1\text{を解け}$$

(問題１１７）

(1)　$y=x+|x|$ のグラフを C とする。３次関数 $y=f(x)$ のグラフが C と x 座標が $-1,0,1$ の３点で交わるとき，x^3の係数をaとして，$f(x)$を求めよ。

(2)Cと$y=f(x)$のグラフが，上の３点以外でも交わるためのaの条件を求めよ。

　ただし、$a>0$ とする。

(問題１１８）

θが実数全体を動くとき，xy平面上の直線$y=(\cos\theta)x+\cos 2\theta$の通りうる範囲を求め図示せよ。

(問題１１９）

$$\frac{y-2z}{x}=\frac{z-3x}{2y}=\frac{y-6x}{5z}\text{のとき，この式の値を求めよ。}$$

(問題１２０）

m,nを整数とする。２次方程式 $2x^2-2(m+n)x+n(2m+n)=0$ の２つの解α，βが

１ $\leq\alpha<$ ２， ２ $<\beta<$ ３となるようにm,nの値を定めα，βを求めよ。

(問題１２１）

kを実数とする。xの３次方程式$x^3+(1-k^2)x-k=0$ が虚数解をもつとき

(1) kのとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 方程式の解α，β，γの間に$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$が成立するとき，

αは実数であることを示し，kの値と３次方程式の解を求めよ。

(問題１２２）

xに関する次の２つの２次不等式について，各問いに答えよ。

$$x^2+(1-a^2-b^2)x-(a^2+b^2)<0\cdots①$$

$$\sqrt{2}x^2+\left(a+b-2\sqrt{2}\right)x-2(a+b)>0\cdots②$$

(1) ①を解け。

(2) ②を解け。

(3) ①，②の連立不等式が解をもたないようなa，bの値の組を座標とする点(a,b)の存在範囲を座標平面上に図示せよ。

(4) で求めた範囲の面積を求めよ。

(問題１２３)
行列$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$と$E$の実数倍でない行列$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$がある。実数$p,q$が$A^2=pA+qE$を満たすとき

(1) p,qをa,b,c,dで表せ。

(2) ３以上のある整数nに対し，$A^n=O$（零行列）となるときp,qを求めよ。

(3) ３以上のある整数nに対し，$A^n=A^{n-1}$かつ$A^n\neq O$となるときp,qを求めよ。

(問題１２４)
実数a,b,cの間に$a^3+b^3+c^3-3abc=0$ の関係があるときxについての 3 つの 2 次方程式は共通解をもつという。その共通解を求めよ。

$$ax^2+bx+c=0, bx^2+cx+a=0, cx^2+ax+b=0$$

(問題１２５)
x^{100} を $(x+1)^2$ で割った余りを求めよ。

(問題１２６)
全ての実数xに対して$\dfrac{1}{3}<\dfrac{x^2-px+p^2}{x^2+x+1}<3$が成り立つときの$p$の値の範囲を求めよ。

(問題１２７)
コインを n 回投げて，表が出た回数 k に応じてポイント 2^k が与えられるゲームを考える。ただし，コインを投げたとき，表が出る確率を$\dfrac{1}{2}$とする。

(1) $n=4$ として，このゲームを 1 ゲーム行ったとき，8 ポイント以上を獲得する確率を求めよ。

(2) $n=4$ として，このゲームを 3 ゲーム行ったとき，少なくとも 1 ゲームは 8 ポイント以上を獲得する確率を求めよ。

(3) $n=4$ として，このゲームを 3 ゲーム行ったとき，獲得するポイントの合計が 32 以上となる確率を求めよ。

(3) このゲームを 1 ゲーム行ったとき，獲得するポイントの期待値を n を用いて表せ。

(問題１２８)
三角形ＡＢＣにおいて，点Ｂ，Ｃを通る２本の平行線l,mを引く。ただし点Ａは平行線の間にあるものとする。辺ＢＣ上に任意の点Ｐをとり，ＰからＡＣに平行な直線を引き，lとの交点をＱとし，ＰからＡＢに平行な直線を引き，mとの交点をＲとする。このときＱ，Ａ，Ｒは一直線上にあることを証明せよ。

(問題１２９)
Aを 2 次の正方行列とする。

(1) $A^2=O$を満たすとき，Aは逆行列をもたないことを示せ。

(2) A が逆行列をもち、$A+A^{-1}=2E$ を満たすとき $A-E$ は逆行列をもたないことを示せ。

(3) Aが逆行列をもち，$A^2+(A^2)^{-1}=2E, A^2\neq E$を満たすとき，$A-E, A+E$のいずれか一方のみが逆行列をもつことを示せ。

(問題１３０)
２つの２次の正方行列を，$T=\begin{pmatrix}0&2\\-1&0\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$とする。
(1) T^2を求めよ。
(2) 実数を成分とする２次の正方行列Xが$TX=XT$を満たすとき，実数x,yを用いて

$$X=xT+yE\text{と表すことができることを示せ。}$$

(3) 実数を成分とする２次の正方行列Xが$X^3=2T$を満たすとき$TX=XT$であることを示し　、
　このようなXを全て求めよ。

(問題１３１)
３次の多項式$f(x)$はx^3の係数が１，$f(0)=0$である。$f(x)$と$f(x+1)$をx^2-x-2で割った余りが等しい$f(x)$を求めよ。

(問題１３２)
$f_n(x)=\dfrac{\tan^{2n+1}x-\tan^n x+1}{\tan^{2n+2}x+\tan^{2n}x+1}\left(0\le x<\dfrac{\pi}{2}\right)$とする。$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$を求め，
関数$y=f(x)$のグラフの概形をかけ。

(問題１３３)
曲線$y=x^2-x$と２直線$y=mx, y=nx$とで囲まれる部分の面積が$\dfrac{37}{6}$となるように整数m,n
を定めよ。ただし$m>n>0$とする。

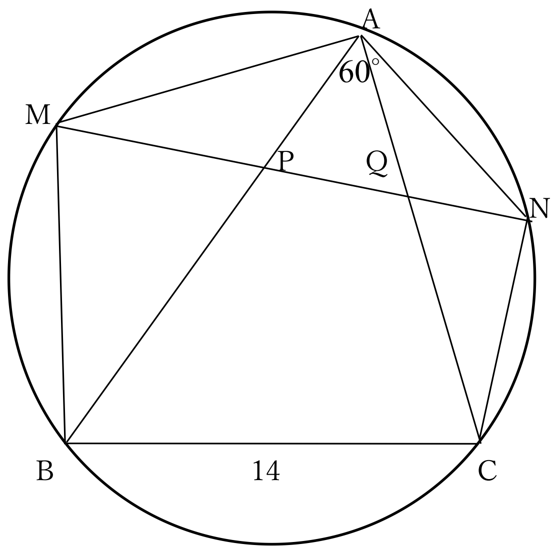
(問題１３４)
実数を成分とする行列$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$は$(a-d)^2=-4bc, b\ne0$を満たす。
(1)方程式$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$が零ベクトル以外の解$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$をもつような$k$（これを$k_0$とする）を定め
，そのときの解全体の集合Lを求めよ。
(2) $F=A-k_0E$（Eは単位行列）とする。Lに属さないベクトル$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$に対し
$F\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$とおくと$P=\begin{pmatrix}x_1&x_0\\y_1&y_0\end{pmatrix}$は逆行列をもつことを示せ。
(3) F^2は零行列であることを示し，$AP=P\begin{pmatrix}k_0&1\\0&k_0\end{pmatrix}$を証明せよ。

(問題１３５)
三角形 ABC において，AB＝4,AC＝5,∠A＝60°とする。∠A の二等分線と BC の交点を D
三角形 ABC の内心を M とする。次を求めよ。
(1)三角形 ABC の面積
(2)AD の長さ
(3)MD の長さ

(問題１３６)
四角形 ABCD が，半径$\dfrac{65}{8}$の円に内接している。この四角形の周の長さが 44 で，辺 BC と辺
CD の長さがいずれも 13 であるとき，残りの２辺 AB と DA の長さを求めよ。

(問題１３７)
図のように，$\angle A = 60^\circ, BC = 14$ の三角形ABCの外接円の弧ABの中点をM，弧ACの中点をNとする。また、MNとAB,ACとの交点をそれぞれP,Qとする。次の問いに答えよ。

(1)三角形APM∽三角形NQAであることを証明せよ。
(2)三角形APQは正三角形であることを証明せよ。
(3) $\angle MBN$ の大きさ,およびMNの長さを求めよ。
(4)MP＝２のとき，PQの長さを求めよ



(問題１３８)
次のような３つのさいころを振るとき，目の和が５の倍数となる場合は何通りあるか。
(1)全て区別がつく
(2) １つだけ区別がつく
(3)区別がつかない

(問題１３９)
座標平面上で，原点Oを基準とする点Pの位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$ が $\vec{p}$ であるとき点PをP$(\vec{p})$
で表す。　ベクトル $\vec{b} = (1,1)$ に対して，不等式 $\left|\vec{p} - \vec{b}\right| \leq \left|\vec{p} + 3\vec{b}\right| \leq 3\left|\vec{p} - \vec{b}\right|$ を満たす点P$(\vec{p})$全体が表す領域を図示せよ。

(問題１４０)

連続関数 $f(x)$ に対して， $F(x)=-\dfrac{x}{2}+\displaystyle\int_x^0 tf(x-t)dt$ とおく。

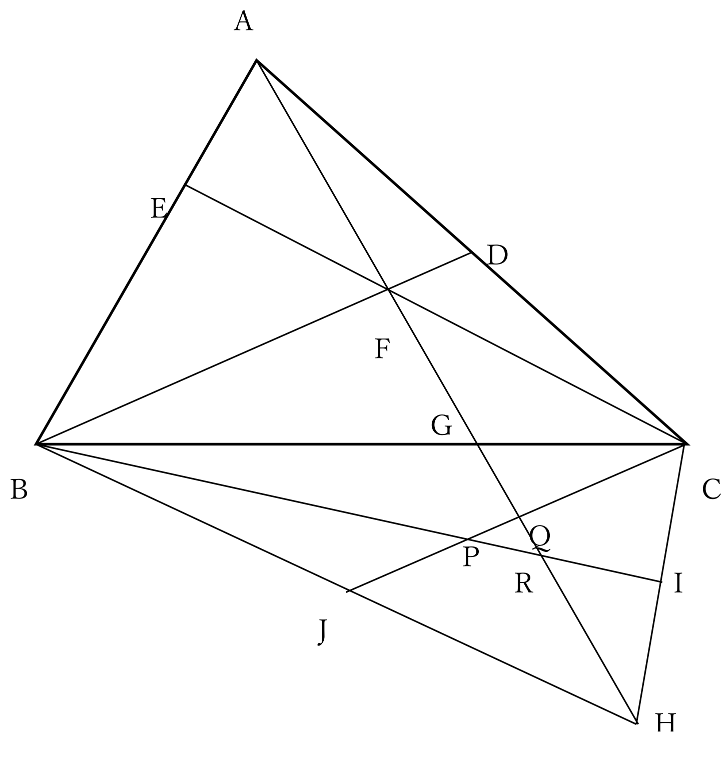
また、 $F''=\cos x$ とする。

(1) $f(x),F(x)$ を求めよ。

$-\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ において， $F(x)$ の最大値、最小値を求めよ。

（問題１４１）

△ABC の辺 AC の中点を D，辺 AB を 1:2 に内分する点を E，BD と CE の交点を F とする。直線 AF と辺 BC の交点を G，更にその延長上の△ABC の外部の一点を H とする。HC および HB の中点をそれぞれ I,J とし，BI と CJ の交点,CJ と HG の交点，HG と BI の交点をそれぞれ P,Q,R とする。



(1)BG と GC の比を求めよ。

(2)△BCH と△PQR の面積比を求めよ。

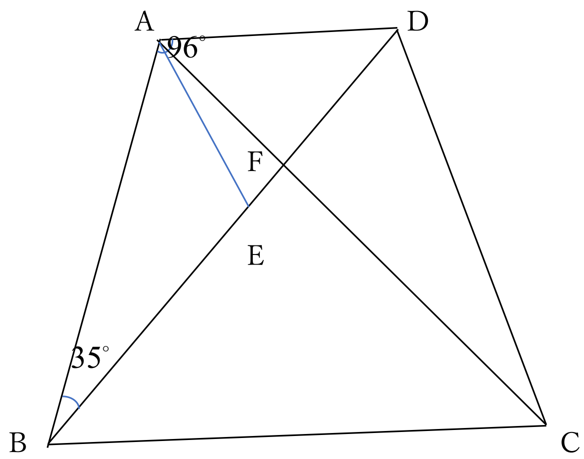
（問題１４２）

円に内接する四角形 ABCD において対角線 BD 上に $\angle BAE = \angle CAD$ となるように点 E をとる。また, $\angle BAD = 96^\circ, \angle ABD = 35^\circ$ とする。

(1) $\angle ACD$ の大きさを求めよ。

(2) $AB \cdot CD = AC \cdot BE$ であることを示せ。

(3) $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ であることを示せ。



（問題１４３）

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 上に 2 点 A,B がある。原点 O と直線 AB の距離を h とする。

$\angle AOB = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2}$ であることを示せ。

(2) h を a, b を用いて表せ。

(問題１４４)

極方程式 $r = \dfrac{b}{1 - a\cos\theta} (b \neq 0, 0 < a < 1)$ で与えられる曲線と，媒介変数表示された曲線

$x = \dfrac{4}{3}\cos t, y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin t$ を X 軸方向へ $\dfrac{2}{3}$ だけ平行移動した曲線が一致するように a, b の値を求めよ。

（問題１４５）

$k<3$ とする。$f(x)=\cos 3x+k\cos x+2\sqrt{2}$ とおく。

(1) $t=\cos x$ とおくとき，$g(t)=f(x)$ となるような関数 $g(t)$ を求めよ。

(2) $g(t)$ の $t>0$ における最小値とそのときの t の値を求めよ。

(3) 方程式 $f(x)=0$ が $-\dfrac{\pi}{3}<x<\dfrac{\pi}{3}$ で異なる 4 個の解を持つような k の値の範囲を求めよ。

（問題１４６）

すべての $x\geq 0$ に対して，$x^3-3x\geq k(3x^2-12x-4)$ が成り立つ k の値の範囲を求めよ。

（問題１４７）

三角錐 ABCD において辺 CD は底面 ABC 垂直である。AB＝3 で，AB 上の 2 点 E,F は AE＝EF＝FB＝1 を満たし，$\angle DAC=30^\circ, \angle DEC=45^\circ, \angle DBC=60^\circ$ である。次を求めよ。

(1) 辺 CD の長さ。

(2) $\theta=\angle DFC$ とおくとき，$\cos\theta$ の値。

（問題１４８）

次の関係式で定められている数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=4, a_{n+1}=4a_n-2^{n+1} (n=1,2,3\cdots)$

（問題１４９）

放物線 $y=x^2$ 上の異なる 3 点 $A(a,a^2), B(b,b^2), O(0,0)$ を考える。ただし，$a<b$ とする。

(1) $\angle AOB$ が直角となるための条件を a,b を用いて表せ。

(2) a,b が(1)の条件を満たすとき，三角形 AOB の面積を最小とするような a,b の値を求めよ。

(3) a,b が(1)の条件を満たすとき，四角形 AOBC が長方形となるように点 C を定める。

点 C の軌跡を求めよ。

（問題１５０）

2 点 $A(3,0), B(0,2)$ がある。原点を中心とする半径 1 の円周上を点 P が動くとき，

PA^2+PB^2 の最大値と，そのときの点 P の x 座標を求めよ。

(問題１５１)

平面上に，1 辺の長さが 2 のひし形 OACB があり，対角線 AB の長さは $\sqrt{2}$ である。

t を正の実数とし，線分 AC,BC をそれぞれ $1:t$ に内分する点を P,Q とする。また直線 AQ と直線 BP の交点を R とする。

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}, \vec{b}=\overrightarrow{OB}$ とおく。

(1) 内積 $\vec{a}\vec{b}$ の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OR}$ を $t, \vec{a}, \vec{b}$ を用いて表せ。

(3)点 A が線分 OR を直径とする円の周上にあるとき，t の値を求めよ

（問題１５２）

2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & x\end{pmatrix}$ に関して，以下の問いに答えよ。ただし，x は１ではない実数。n は自然数とする。

(1) P の逆行列 P^{-1} を, x を用いて表せ。

(2) $B = P^{-1}AP$ を, x を用いて表せ。

(3) B の $(1,2)$ 成分が 0 となる x の値を求め，そのときの B^n を求めよ。

(4) x が(3)の値のとき, A^n を求めよ。

(問題１５３)

a を実数とし，関数 $f(x)=\sin 2x+2a(\sin x-\cos x)+a^3 (0^\circ \leq x \leq 180^\circ)$ を考える。

(1) $t=\sin x-\cos x (0^\circ \leq x \leq 180^\circ)$ とおき，$f(x)$ を t の関数 $g(t)$ として表せ。また，t の範囲を求めよ。

(2) t が(1)で求めた範囲を動くとき，$g(t)$ の最大値 $m(a)$ を求めよ。

(3) 関数 $y = m(a)$ のグラフをかけ。

(問題１５４)

円 O ：$x^2 + y^2 = 4$ と点 P$(0,-1)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 円 O 上を動く点 A に対して，点 P が QA を $1:2$ に内分するような点 Q は 1 つの円周上を動くことを示し，その円の中心と半径を求めよ。

(2) 円 O に内接する△ABC の重心が点 P であるとする。点 A の座標が $(2,0)$ であるとき,

直線 BC の方程式を求めよ。

(問題１５５)

空間内に 3 点 $A(1,0,0), B(0,2,0), C(0,0,3)$ をとる。

(1)空間内の点P が $\overrightarrow{AP}\cdot\left(\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}\right)$ を満たしながら動くとき，この点P はある定点Q から一定の距離にあることを示せ。

(2)(1)における定点 Q は 3 点 A,B,C を通る平面上にあることを示せ。
(3)(1)における P について，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。

(問題１５６)

空間の 2 点 P,Q の原点 O を基点とする位置ベクトルが

$\overrightarrow{OP}=(2\cos t,2\sin t,1),\overrightarrow{OQ}=(-\sin 3t,\cos 3t,-1)$

によって与えられている。ただし,$-180^\circ \leq t \leq 180^\circ$ とする。

(1) 点 P と点 Q の距離が最小となる t と，そのときの点 P の座標を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角が 0° 以上 90° 以下となる t の範囲を求めよ。

(問題１５７)

四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD は $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ を満たしており，0 と異なる 4 つの実数 p,q,r,s に対して 4 点 P,Q,R,S を $\overrightarrow{OP}=p\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OQ}=q\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OR}=r\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OS}=s\overrightarrow{OD}$ によって定める。このとき P,Q,R,S が同一平面上にあれば $\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=\frac{1}{q}+\frac{1}{s}$ が成り立つことを示せ。

(問題１５８)

曲線 $y=x^2$ と直線 $y=2x+t(-1<t<1)$ の 2 つの交点を A,B とし，点 $(0,1)$ を C とする。三角形 ABC の面積の 2 乗を $S(t)$ とおく。

(1) $S(t)$ を求めよ。

(2) $S(t)$ の増減を調べ，$S(t)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ。

（問題１５９）

関数 $F(x)=\int_0^x \left(at^2+bt+c\right)+d$ が $x=-1$ で極大値 $\frac{17}{3}$， $x=3$ で極小値 -5 をとるとき，定数 a,b,c,d の値を求めよ。

（問題１６０）

関数 $f(x)$ が等式 $f(x)=x^2-x\int_0^1 f(t)dt+2\int_1^x f'(t)dt$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ は 2 次関数であることを示せ。
(2) $f(x)$ を求めよ。

（問題１６１）

不等式 $\left|x^2-1\right|+\left|y+2\right|\leq 1$ で表される領域を D とする。

(1) 領域 D を図示せよ。
(2) 領域 D の面積を求めよ。

（問題１６２）

a は実数とする。２つの曲線 $y=x^3+2ax^2-3a^2x-4$ と $y=ax^2-2a^2x-3a$ は，ある共有点で両方の曲線に共通な接線を持つ。このとき a を求めよ。

（問題１６３）

$f(x)=ax^2+bx+c$ とし，２つの曲線 $y=f(x)$ と $y=-x^2+1$ は点$(1,0)$で共通接線をもつ。

(1) a,b を c を用いて表せ。
(2) 方程式 $f(x)=0$ が 1 以外の解 α をもつとき，a を c を用いて表せ。
(3) (2)と同じ仮定のもとで，$\int_\alpha^1 \left\{f(x)-x^2+1\right\}dx=0$ となるような c の値を求めよ。

（問題１６４）

多項式 $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ が任意の 2 次以下の多項式 $g(x)$ に対して

$\int_0^1 f(x)g(x)dx=0$ を満たすとき，α,β,γ の値を求めよ。

(問題１６５）
3 点 $O(0,0), A(4,0), B(2,2)$ を頂点とする三角形 OAB の面積を直線 $y=mx+m+1$ が 2 等分するとき，定数 m の値を求めよ。

（問題１６６）

xy 平面上の半径１の円 C が，直線 $l: x+\sqrt{3}y=4$ と単位円 $x^2+y^2=1$ の両方に接するという。

このとき C の中心の座標を求めよ。

（問題１６７）

座標平面上の原点Ｏと２点 $A\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right), B\left(1,\frac{1}{3}\right)$ を頂点とする三角形 AOB の重心，外心，内心をそれぞれ G,C,I で表す。これら G,C,I を求めよ。また，３点 G,C，I は同一直線上にあることを示し，その直線の方程式を求めよ。

（問題１６８）

$f(x)=x^3-(2m+1)x^2+m^2x$ とし， m は正の定数とする。方程式 $f(x)=0$ は相異なる２つの正の実数解 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$ をもつことを示せ。また，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれる図形について， $y\geq 0$ の範囲と， $y\leq 0$ の範囲の部分の面積が等しいとき m,α,β の値を求めよ。

（問題１６９）

$a>0$ とする。座標平面上において，２点 $(a,0),(2a+1,0)$ から放物線 $y=x^2$ に引いた接線で

x 軸と異なる直線をそれぞれ l_1,l_2 とする。

(1) l_1 と l_2 の方程式を求めよ。

(2) この放物線と l_1,l_2 で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

(3) S が l_1,l_2 および x 軸で囲まれる部分の面積に等しくなるような a の値を求めよ。

（問題１７０）

放物線 $C: y=x^2$ 上の２点 $A(a,a^2),B(b,b^2),(a<0<b)$ をとる。

(1)放物線 C の点 A における接線と点 B における接線の交点の座標を求めよ。

(2)放物線 C と直線 AB で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

(3)三角形 OAB の面積を T とする。$\dfrac{T}{S}$ がとりうる値の最大値を求めよ。

ただし，O は原点とする。
（問題１７１）
三角形 ABC の重心を G，外心を E とする。次を示せ。

(1) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

(2) $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EH}$ となる点を H とする。点 H は三角形 ABC の垂心である。

(3) E,G,H は一直線上にあり，$EG:GH=1:2$ である。

（問題１７２）

正の実数からなる数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とおく。数列 $\{a_n\}$ が

$2S_n=a_n^2+n(n=1,2,3\cdots)$ を満たすとき

(1) a_1 を求めよ。

(2) a_1,a_2,a_3 を求めよ。

(3) a_n を予想し，それが正しいことを数学的帰納法によって証明せよ。

（問題１７３）

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が $x=\alpha$ で極大値，$x=\beta$ で極小値をとるとする。

このとき，$f(\alpha)-f(\beta)$ を $\beta-\alpha$ の式で表せ。

$f(\alpha)-f(\beta)=4,b=a^2-5$ となるときの a の値を求めよ。

（問題１７４）

(1) $\sin\theta+\cos\theta=t$ とおく。$0^\circ\leq\theta\leq 90^\circ$ のとき，t の取りうる値の範囲を求めよ。

(2) $0^\circ\leq\theta\leq 90^\circ$ のとき，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

（問題１７５）

a,b,c は正の整数であり，a^2b は 7 桁の整数。$\dfrac{b^2}{c^8}$ は小数で表すと少数第 10 位に初めて 0 出ない数が現れる数である。このとき，ac^2 は何桁の整数であるか求めよ。

$\dfrac{ab\sqrt{b}}{c^4}$ は小数で表すと小数第何位に初めて 0 出ない数字が表れるか求めよ。

（問題１７６）

(1) $\log_2 3$ は無理数であることを証明せよ。
(2) n が正の整数のとき，が $\log_2 n$ 整数でない有理数となることがあるかどうか調べよ。

（問題１７７）

(1) $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおく。$\sin\theta\cos\theta$ を t で表せ。
(2) $0\le\theta\le\pi$ のとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。
(3) $0\le\theta\le\pi$ のとき，θ の方程式 $2\sin\theta\cos\theta-2(\sin\theta+\cos\theta)-k=0$
の解の個数を，定数 k が次の 3 つの値のときについて調べよ。

$k=1, k=1-2\sqrt{2}, -1$

（問題１７８）

関数 $f(\theta)=6\sin\theta\cos\theta-8\sin^3\theta\cos\theta+2\cos^2\theta-1$ について

(1) $\sin 2\theta+\cos 2\theta=t$ とおくとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。
(2) $f(\theta)$ を t を用いて表せ。
(3) $f(\theta)$ の最大値を求めよ。

（問題１７９）

r は実数の定数とし，$r\ne 1$ とする。数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ は初項 $a_1=1, b_1=0$ で，全ての正の整数 n に対して次の関係を満たす。

$$a_{n+1}=\frac{r}{2}a_n-\frac{r}{2}b_n, b_{n+1}=\left(1-\frac{r}{2}\right)a_n+\left(1+\frac{r}{2}\right)b_n$$

(1) $v_n=a_n+b_n$ とする。数列 $\{v_n\}$ の第 n 項を求めよ。

(2) $w_n=a_n-b_n$ とする。数列 $\{w_n\}$ の第 n 項を求めよ。

(3) 数列$\{a_n\},\{b_n\}$の第n項をそれぞれ求めよ。

（問題１８０）

p,qは正の有理数で$\sqrt{q}$は無理数であるとする。自然数nに対し，有理数a_n,b_nを次によって定める。$\left(p+\sqrt{q}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{q}$

(1) $\left(p-\sqrt{q}\right)^n = a_n - b_n\sqrt{q}$を示せ。

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \sqrt{q}$を示せ。

（問題１８１）

xは実数とする。このとき関数$y=\dfrac{10}{3}(3^x+3^{-x})-(9^x+9^{-x})-\dfrac{4}{3}$の最大値とそのときの$x$の値を求めよ。

（問題１８２）

$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{2}, \sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{3}$のとき，次の問いに答えよ。

(1) $\cos(\alpha-\beta)$の値を求めよ。

(2) 一般に，次の式が成り立つことを示せ。

$\cos 2x+\cos 2y = 2\cos(x+y)\cos(x-y)$

(3) $\cos\left(\alpha+\beta\right)$の値を求めよ。

(問題１８３)

$0\leq\theta\leq\pi$として，xの関数$f(x)$を$f(x)=x^2+\dfrac{2\cos\theta}{\sqrt{3}}x-2\sin\theta$と定める。$x$が整数を動くときの$f(x)$の最小値を$m(\theta)$とおく。

(1) θが$\cos\theta\geq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$を満たす場合に，$m(\theta)$が最小となる$\theta$を求めよ。

(2) $m\left(\theta\right)$が最小となるθの値と，そのときの最小値を求めよ。

（問題１８４）

第 3 項が 8，第 10 項が 29 の等差数列$\{a_n\}$の初項をa，公差をdとするとき

(1) aとdの値を求めよ。

(2) 和$2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_n}$を$n$の式で表せ。

(3) 200 以下のa_nのうち偶数であるものの和を求めよ。

（問題１８５）

$\cos 3\theta+\sin 2\theta+\cos\theta>0$を満たす$\theta$の範囲を求めよ。

（問題１８６）

$a>0$とする。項数 3 の 2 つの有限数列 4， a,bおよび$b,c,36$はともに等比数列であり，a,b,cは等差数列である。このときa,b,cの値を求めよ。

（問題１８７）

数列$\{a_n\}$は初項 2，公比rの等比数列で，初項から第 10 項までの積が2^{20}である。ただし，

$r>0$とする。

(1) $\log_2 r$を求めよ。

（問題１８８）

関数$f(x)$は

$$f(x)=x+2\int_0^{\pi} f(t)\sin(x-t)dt$$

を満たすとする。このとき$f(x)$を求めよ。

（問題１８９）

m,nを正の整数とする。定積分$I(m,n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$に関して

(1) $I(m,1)$を求めよ。

(2) $n\geq 2$のとき$I(m,n)$を$I(m+1,n-1)$を用いて表せ。

(3) $I(m,n)$をm,nを用いて表せ。

（問題１９０）

$f(x)$ は実数全体で定義された何回でも微分可能な関数で， $f(0)=0, f(\pi)=0$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $\int_0^{\pi} f(x)\sin x dx = -\int_0^{\pi} f''(x)\sin x dx$ を示せ。

(2) $f(x)=x(x-\pi)$ のとき，実数 a に対し

$F(a)=\int_0^{\pi}\{af(x)-\sin x\}^2 dx$

とする。a を変化させたとき， $F(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

(問題１９１）

(1) $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $\dfrac{2x}{\pi} \le \sin x$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 不等式 $\int_0^{\pi} e^{-\sin x} dx \le \pi\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$ が成り立つことを証明せよ。

（問題１９２）

関数 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+2}$ a,b,c は定数，が $x=-2$ で極小値 $\dfrac{1}{2}$， $x=1$ で極大値 2 をもつ。このとき， a,b,c の値を求めよ。

（問題１９３）

関数 $f(x)=\dfrac{x}{3x^2+1}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $C: y=f(x)$ に接する接線のうち， y 切片が最大になるものを l とする。曲線 l の接点の座標を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 l および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

（問題１９４）

数列 $\{x_i\}$ が漸化式 $x_{i+1}=\dfrac{x_i^2+1}{2}$ を満たしている。

(1) 全ての自然数 i に対して $x_{i+1} \ge x_i$ が成立することを示せ。

(2) $|x_i| \le 1$ のとき，全ての自然数 i に対して $x_i \le 1$ であることを示せ。

(3) 自然数nに対して，等式$x_{i+1}-x_i=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)^2$が成立することを示せ。

(4) $|x_i|\leq 1$のとき，$x_{i+1}-x_i=\dfrac{n}{2}(x_i-1)^2$が成立することを示せ。

初項x_1の値に応じて数列$\{x_i\}$の収束，発散について調べ収束するときは極限値を求めよ。

（問題１９５）

$k<3$とする。$f(x)=\cos 3x+k\cos x+2\sqrt{2}$とおく。

(1) $t=\cos x$とおくとき，$g(t)=f(x)$となるような$g(t)$を求めよ。
(2) $g(t)$の$t>0$における最小値とそのときのtの値を求めよ。

（問題１９６）
実数全体で定義された連続な関数$f(x)$は

$$f(x)=2x^2-\int_1^x tf(t)dt$$

を満たしている。$f(x)$を求めよ。

（問題１９７）
関数$f(x)$を

$$f(x)=\begin{cases} 1(x<0,2<x) \\ |1-x|(0\leq x\leq 2) \end{cases}$$

(1) $g(x)=f(f(x))$とおく。関数$y=g(x)$のグラフをかけ。

(2) nを自然数とする。$\displaystyle\int_0^{n^2} g\left(\frac{x^2-n^2+n}{n}\right)\cos\frac{\pi x}{n}dx$を求めよ。

(問題１９８)

aを実数とする。曲線$y=\dfrac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$を$C$，直線$y=ax+3a+1$を$l$とする。

(1) 直線lはaによらず，定点 P を通る。P の座標を求めよ。
(2) Cとlが異なる 2 点を共有するときのaの値の範囲を求めよ。

(問題１９９)

$f(x)=e^{-x}\cos x$とする。

(1) $e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x$を微分せよ。

(2) 定積分$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$を求めよ。

(3) 自然数nに対して，

$$S_n=\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{\pi}{2n}\right)+f\left(\frac{2\pi}{2n}\right)+f\left(\frac{3\pi}{2n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n\pi}{2n}\right)\right\}$$

とおく。次の式が成り立つことを示せ。

$$S_n<\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx<S_n+\frac{1}{n}$$

(4) $\lim_{n\to\infty} S_n$を求めよ。

（問題２００）

nを整数とする。曲線$y=\frac{1}{n^5}(x-n)(2n-x)$と$x$軸で囲まれた部分を$y$軸の周りに１回転してできる回転体の体積を$V_n$とする。

(1) V_nをnを用いて表せ。

(2) $a_n=V_{n+1}+V_{n+2}+V_{n+3}+\cdots+V_{2n}$とおくとき，$U=\lim_{n\to\infty} a_n$の値を求めよ。