(問題１９９)

$f(x)=e^{-x}\cos x$ とする。

(1) $e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x$ を微分せよ。

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ を求めよ。

(3) 自然数 n に対して,

$$S_n=\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{\pi}{2n}\right)+f\left(\frac{2\pi}{2n}\right)+f\left(\frac{3\pi}{2n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n\pi}{2n}\right)\right\}$$

とおく。次の式が成り立つことを示せ。

$$S_n<\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx<S_n+\frac{1}{n}$$

(4) $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

(解答)

(1)

$$\left(e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x\right)'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x+e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x$$
$$=2e^{-x}\cos x$$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos x dx=\left[\frac{1}{2}\left(e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}+1\right)$$

(3)

$$f'(x)=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x=-2e^{-x}(\cos x+\sin x)<0\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

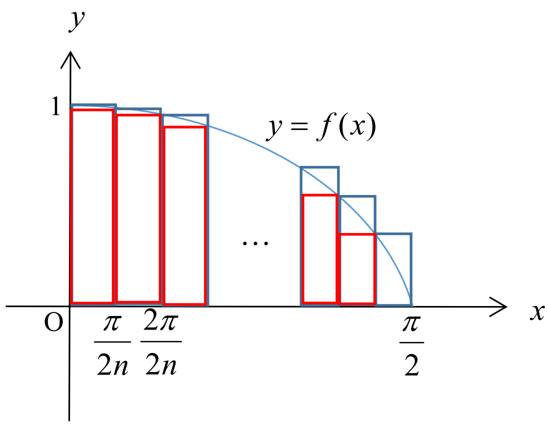
$$f''(x)=2e^{-x}(\cos x+\sin x)-2e^{-x}(-\sin x+\cos x)=4e^{-x}\sin x>0\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

より $y=f(x)\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ のグラフは単調減少，上に凸。

$$\frac{\pi}{2}S_n=\frac{\pi}{2n}\left\{f\left(\frac{\pi}{2n}\right)+f\left(\frac{2\pi}{2n}\right)+f\left(\frac{3\pi}{2n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n\pi}{2n}\right)\right\}$$

$$\frac{\pi}{2}\left(S_n+\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{2n}\left\{f(0)+f\left(\frac{\pi}{2n}\right)+f\left(\frac{2\pi}{2n}\right)+f\left(\frac{3\pi}{2n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n\pi}{2n}\right)\right\}$$

$\frac{\pi}{2}S_n<\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx<\frac{\pi}{2}\left(S_n+\frac{1}{n}\right)$を図示して証明する。



図

$\frac{\pi}{2}S_n$ が $\boxed{}$ の面積。

$\frac{\pi}{2}\left(S_n+\frac{1}{n}\right)$ が $\boxed{}$ の面積。

よって

$$\frac{\pi}{2}S_n<\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx<\frac{\pi}{2}\left(S_n+\frac{1}{n}\right)$$

(4)

図より $\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\frac{1}{2}\left[\left(e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}+1\right)$