（問題２４４）

k を正の定数とする。直線 $y=kx$ を l とし，原点 O を通り l に垂直な直線を m とする。

2 次正方行列 A で表される 1 次変換を f とする。f により, 直線 l 上の点は自分自身に移り,

直線 m の点は原点に移る。

(1) 行列 A を求めよ。

(2) P を座標平面上の点とする。点 P の f による像を Q とする。

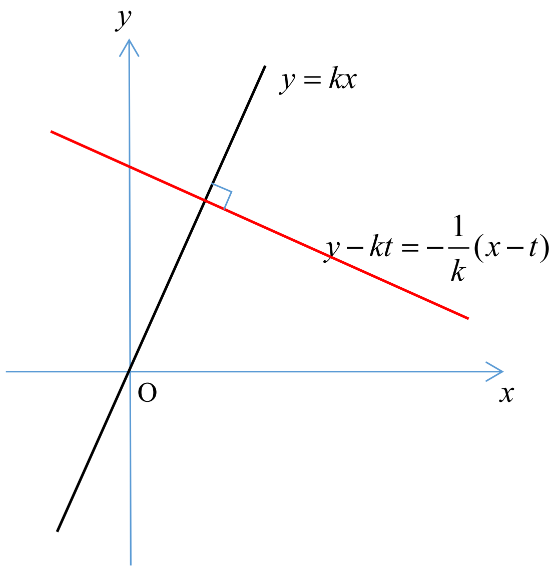
(ｉ)点 Q は l 上の点であることを示せ。

(ⅱ)点 P が l 上の点でないとき，直線 PQ と直線 l は垂直であることを示せ。

(ⅲ)3 点 $(0,0),(1,0),(0,2)$ を頂点とする三角形の辺上を点 P が動くとき，点 Q の動く範囲を求めよ。

（解答）

直線 $l: y=kx$ 上の点をパラメータ t を用いて $Q(t,kt)$ と表す。Q を通り直線 l と直交する直線上の点 P が点 Q に移る。



$$A\begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{k}x+\left(k+\frac{1}{k}\right)t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t \\ kt \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{k^2+1} & \frac{1}{k+\frac{1}{k}} \\ \frac{k}{k^2+1} & \frac{k^2}{k^2+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{k^2+1} & \frac{k}{k^2+1} \\ \frac{k}{k^2+1} & \frac{k^2}{k^2+1} \end{pmatrix}$$

(2)(ⅰ)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{k^2+1} & \dfrac{k}{k^2+1} \\ \dfrac{k}{k^2+1} & \dfrac{k^2}{k^2+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{k^2+1} \begin{pmatrix} x+ky \\ k(x+ky) \end{pmatrix}$$

$\therefore y' = kx'$

(ⅱ)

$$\frac{y'-y}{x'-x} = \frac{\dfrac{k(x+ky)}{k^2+1} - y}{\dfrac{x+ky}{k^2+1} - x} = \frac{kx+k^2y-y(k^2+1)}{x+ky-x(k^2+1)} = -\frac{1}{k} \cdot \frac{kx-y}{kx-y} = -\frac{1}{k}$$

(ⅲ)

$k > \dfrac{1}{2}$ のとき

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{k}x + 2 \\ y = kx \end{cases}$$

$$-\frac{1}{k}x + 2 = kx$$

$$\left(\frac{k^2+1}{k} \right) x = 2 \Rightarrow x = \frac{2k}{k^2+1}$$

$$(0,0) \le Q(x,y) \le \left(\frac{2k}{k^2+1}, \frac{2k^2}{k^2+1} \right)$$

$k \le \dfrac{1}{2}$ のとき

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{k}(x-1) \\ y = kx \end{cases}$$

$$-\frac{1}{k}(x-1) = kx$$

$$\frac{k^2+1}{k}x = \frac{1}{k} \Rightarrow x = \frac{1}{k^2+1}$$

$$(0,0) \le Q \le \left(\frac{1}{k^2+1}, \frac{k}{k^2+1}\right)$$