(問題２２８)

(1) 次の不定積分 $\int \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}}$ を $s+\sqrt{s^2-1}=t$ と置くことにより求めよ。

(2) xy 平面上の曲線 $y=f(x)$ (ただし，$f(x)\geq 0$)について，任意の正の数 t に対して，

曲線 $y=f(x)(0\leq x\leq t)$ の長さと，直線 $x=t$，x 軸，y 軸および曲線 $y=f(x)$ で囲まれた

図形の面 x 積との比は 1 : 1 であるという。このとき，$x\geq 0$ において，$f(0)=1$ かつ $x>0$

のとき $f(x)>1$ である曲線の方程式を求めよ。

(解答)

(1)

（解法のテクニック）

積分で $\sqrt{x^2+A}$ 系統が出てきたら

オイラーの置換を用いる。

オイラーの置換：$x+\sqrt{x^2+A}=t$ とおく。

x の変数から t の変数に置き換える。

$x+\sqrt{x^2-1}=t$

両辺をそれぞれ微分して

$$\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)dx=dt$$

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}dx=dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\frac{1}{t}dt$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\int\frac{1}{t}dt$$

これで左辺に x だけ，右辺に t だけ。

$$\int\frac{1}{t}dt$$

$$=\log t+C$$

$$=\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$$

(2)

$f(x)(0 \le x \le t)$ の長さ L は

$$L = \int_0^t \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

直線 $x = t$ ， x 軸， y 軸および曲線で囲まれた図形の面積 S は

$$S = \int_0^t f(x) dx$$

$L : S = 1:1 \Rightarrow L = S$

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx = \int_0^1 f(x) dx$$

$$\sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} = f(x)$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y$$

両辺を 2 乗して

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2 - 1$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{1}{y^2 - 1} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} = \pm 1$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \pm dx$$

$$\log\left|y + \sqrt{y^2 - 1}\right| = \pm x + C$$

$f(0) = 1$ より

$$\log\left|1 + \sqrt{1^2 - 1}\right| = 0 + C \Rightarrow C = 0$$

$$\log\left|y + \sqrt{y^2 - 1}\right| = \pm x$$

$x > 0$ のとき $y > 1 \Rightarrow \log(y + \sqrt{y^2 - 1}) > 0$ より

$\log(y + \sqrt{y^2 - 1}) = x$

$y + \sqrt{y^2 - 1} = e^x$

$\sqrt{y^2 - 1} = e^x - y$

$y^2 - 1 = e^{2x} - 2e^x y + y^2$

$2e^x y = e^{2x} + 1$

$\therefore y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$