数学Ⅱ（図形、ベクトル）　解法のテクニック

1. 3 点 Q,A,R が一直線上にあることの証明

> (解法のテクニック)
> [解法 1] QA の延長線上のある点を R’とし，R’と R が一致することを証明する。
> [解法 2]∠QAR＝180°を示す。

2. $f(x,y)+kg(x,y)=0$ は$f(x,y)=0$ と$g(x,y)=0$ の共有点を通る。
   ただし、$g(x,y)=0$ を表すkはない。

3. 三角形 ABC の面積Sは

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=rs=\frac{abc}{4R}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2}$$

($s=\dfrac{a+b+c}{2}$, r, Rはそれぞれ三角形の内接円、外接円の半径)

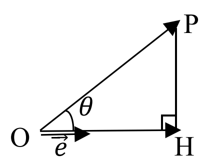
4. 図形の問題→補助線を引く。

> (解法のテクニック)
> [解法 1]ある点を通る，ある直線に平行な線を引く。
> [解法 2]ある点からある直線に垂線を下ろす。

5. 点(x_1,y_1)が$f(x,y)=1$ 上にないことの証明
   ➡ $1-f(x_1,y_1)\neq 0$ を示す。

6. 点 P が円$x^2+y^2=a^2$上にある。→$\left|\overrightarrow{OP}\right|=a$

7. $\overrightarrow{OP}$と$\vec{e}$($|\vec{e}|=1$)のなす角をθとし，点 P から
   $\vec{e}$の延長上に垂線 PH を下ろす。
   $\overrightarrow{OH}=\left(\left|\overrightarrow{OP}\right|\cos\theta\right)\vec{e}=\left(\overrightarrow{OP}\cdot\vec{e}\right)\vec{e}$



（注意）$(\overrightarrow{OP}\cdot\vec{e})$はスカラー量，ベクトル量ではない。

10. 空間のベクトル表示➡平面上のベクトル表示に変形。

(解法のテクニック)
$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = s\overrightarrow{\mathrm{AO}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + u\overrightarrow{\mathrm{AC}}$と表示するよりも
$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$と表示する方が計算が楽！
(s, t, uの 3 変数 → s, tの 2 変数)

11.シュワルツの不等式

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

[証明]

$\vec{a} = (a, b)$,$\vec{x} = (x, y)$とおくと

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = |\vec{a}||\vec{x}| \cos\theta$$

2 乗して

$$(\vec{a} \cdot \vec{x})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{x}|^2 \cos^2\theta$$

$0 \leq \cos^2\theta \leq 1$ より

$$(\vec{a} \cdot \vec{x})^2 \leq |\vec{a}|^2|\vec{x}|^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = (a \quad b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by$$

$$\therefore\ \left(a^2 + b^2\right)\left(x^2 + y^2\right) \geq \left(ax + by\right)^2$$

12.点と平面の距離

点 $\mathrm{P}(x_0, y_0, z_0)$と平面$ax + by + cz + d = 0$ の距離lは

$$l = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

[証明]

距離をlとすると

$$(x_0, y_0, z_0) + l\frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \left(x_0 + \frac{la}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, y_0 + \frac{lb}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, z_0 + \frac{lc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right)$$

は平面上の点だから

$$a\left(x_0 + \frac{la}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right) + b\left(y_0 + \frac{lb}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right) + c\left(z_0 + \frac{lc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right) + d = 0$$

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d + l\frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$

$$l = \frac{-(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$l > 0$ より

$$\therefore l = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

13.点と直線の距離

点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ と直線 $ax + by + c = 0$ の距離 l は

$$l = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

14.ヘッセの標準形

平面 C: $lx+my+nz=p(p\geq 0, l^2+m^2+n^2=1)$

原点 O から平面 C に下した垂線の足を H とすると

OH= p,$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p(l,m,n)$

[証明]

$$lx+my+nz-p=0$$
$$\Leftrightarrow lx+my+nz-(l^2+m^2+n^2)p=0$$
$$\Leftrightarrow l(x-lp)+m(y-mp)+n(z-np)=0$$

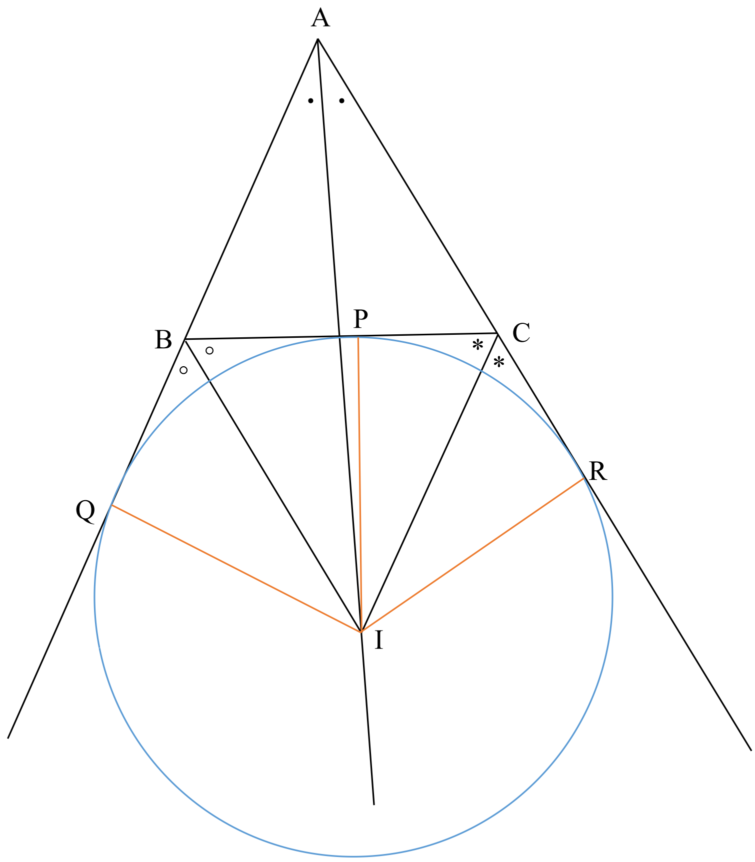
よって平面 C は点 H(lp,mp,np)を通り法線ベクトルは$\vec{n}=(l,m,n)$となる。

OH= $\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|=\sqrt{p^2(l^2+m^2+n^2)}=p$

15.三角形の傍心

三角形の 1 つの頂点における内角の 2 等分線と

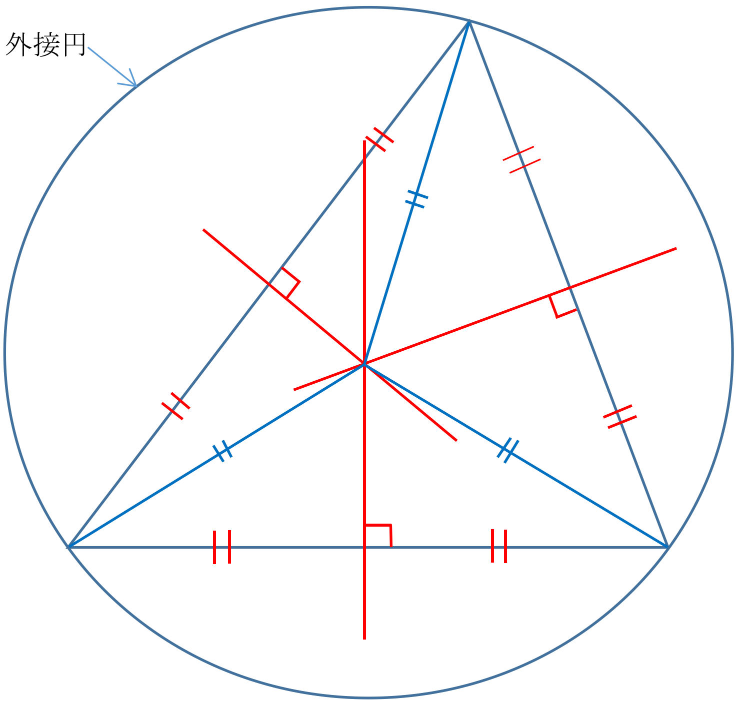
他の 2 つの頂点における外角の二等分線は一致する。



［証明］
∠QBC、∠RCB の 2 等分線の交点を I とする。
点 I から BC および AB,AC の延長上に垂線 IP,IQ,IR を下ろす。
　△IBP≡ △IBQ
　△ICP≡ △ICR より
IQ=IP=IR
傍接円が存在する。
また、 IAQ≡ IAR
∴∠IAQ=∠IAR

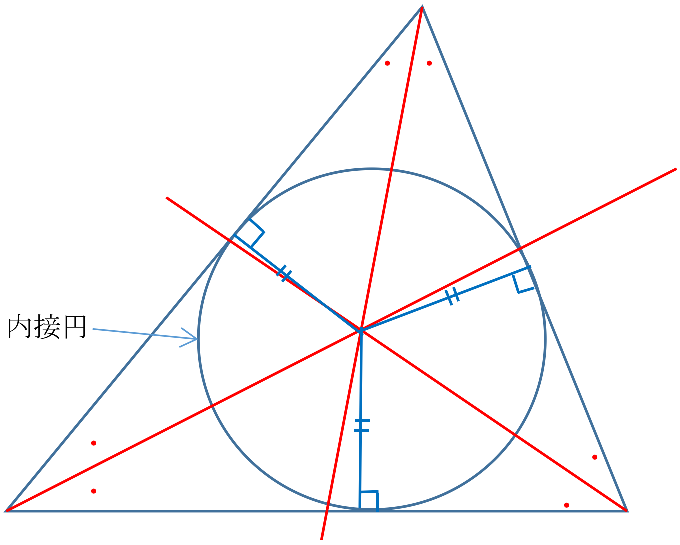
傍心円が存在する。
また、 △IAQ≡ △IAR∴∠IAQ=∠IAR

16. **三角形の外心**
三角形の 3 つの辺の垂直二等分線は 1 点で交わり，その点は 3 つの頂点から等距離にある。



17.三角形の内心

三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わり，その点は 3 つの辺から等距離にある。

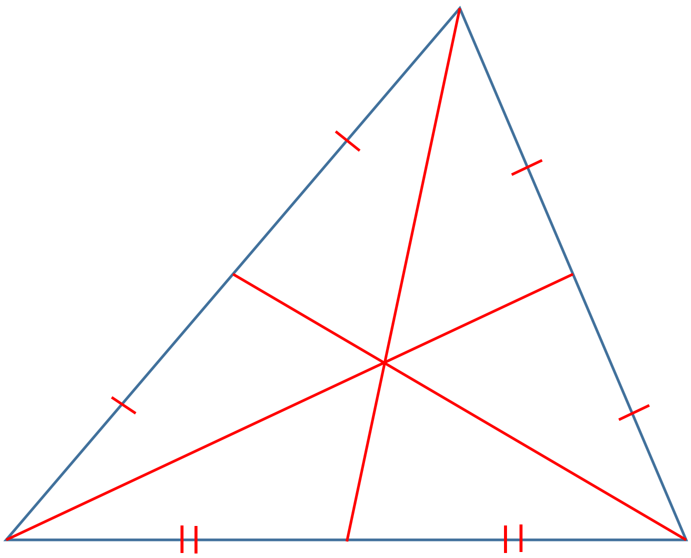


18.三角形の重心

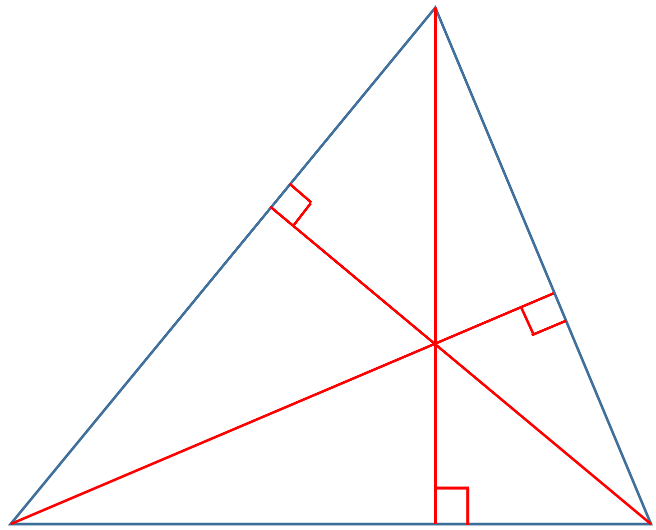
三角形の 3 つの中線は

1 点で交わる。

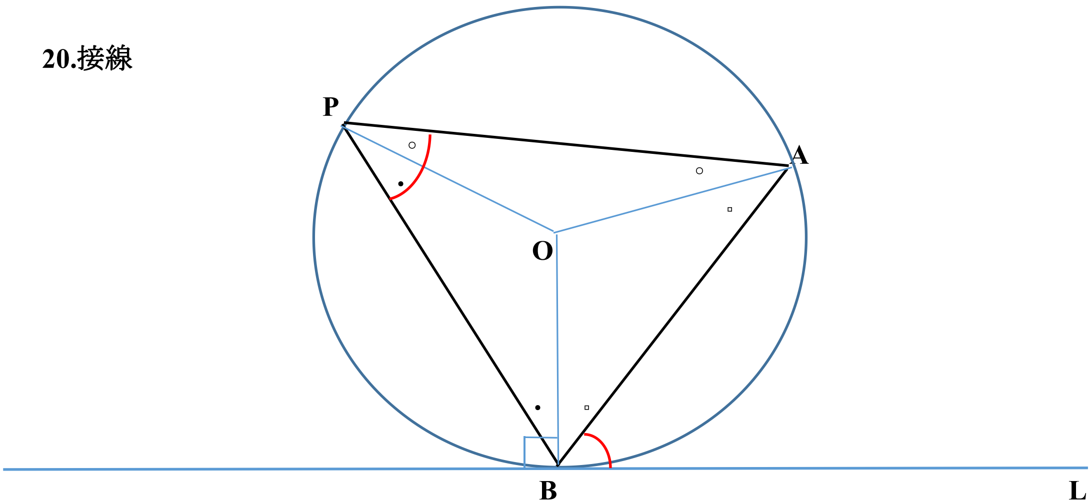
各中線を 2 : 1 に内分する。



19.三角形の垂心三角形の 3 つの頂点からそれぞれの対辺に下ろした垂線は 1 点で交わる。



20.接線



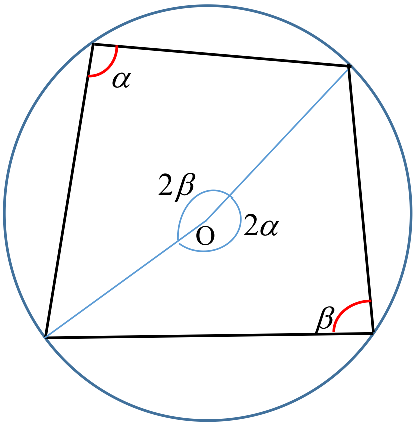
$\angle APB = \angle ABL$

［証明］

2(◦ ＋・＋▫） ＝180°

◦ ＋・＝90°－ ▫

21.四角形が円に内接する



対角の和が 180°

［証明］

円周角の定理より

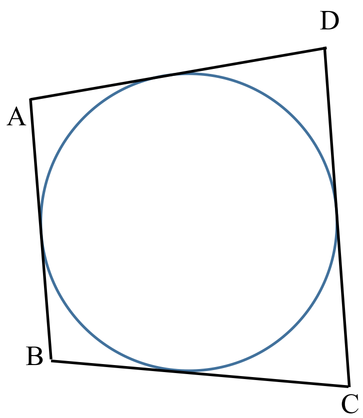
$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ$$

$$\therefore \alpha + \beta = 180^\circ$$

22.円外接四辺形

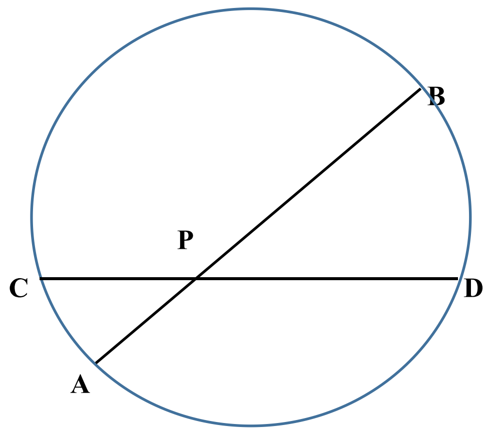
四辺形 ABCD が円に外接

$\Leftrightarrow\ AB + CD = BC + AD$

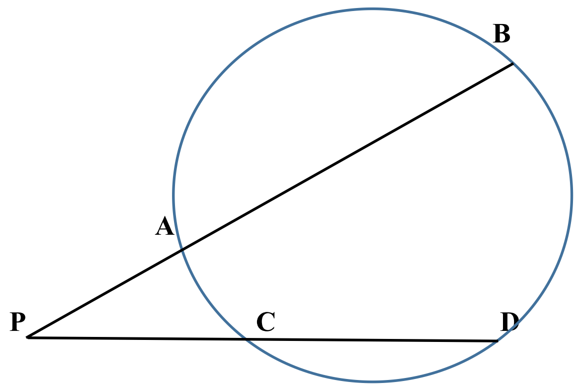


23.方べきの定理

$PA \cdot PB = PC \cdot PD$



$PA \cdot PB = PC \cdot PD$



$PA \cdot PB = PL^2$