（問題２００）

$n$ を整数とする。曲線 $y=\dfrac{1}{n^5}(x-n)(2n-x)$ と $x$ 軸で囲まれた部分を $y$ 軸の周りに１回転してできる回転体の体積を $V_n$ とする。

(1) $V_n$ を $n$ を用いて表せ。

(2) $a_n = V_{n+1}+V_{n+2}+V_{n+3}+\cdots+V_{2n}$ とおくとき，$U=\lim_{n\to\infty} a_n$ の値を求めよ。

（解答）

(1)

$$n^5 y=(x-n)(2n-x)$$

$$x^2-3nx+n^2(n^3y+2)=0$$

$$x=\frac{n}{2}\left(3\pm\sqrt{1-4n^3y}\right)$$

$$n^5y=\left(\frac{3n}{2}-n\right)\left(2n-\frac{3n}{2}\right)$$

$$n^5y=\frac{n^2}{4}$$

$$y=\frac{1}{4n^3}$$

$$V_n=\pi\int_0^{\frac{1}{4n^3}}\left[\left\{\frac{n}{2}\left(3+\sqrt{1-4n^3y}\right)\right\}^2-\left\{\frac{n}{2}\left(3-\sqrt{1-4n^3y}\right)\right\}^2\right]dy$$

$$=3n^2\pi\int_0^{\frac{1}{4n^3}}\sqrt{1-4n^3y}\,dy$$

$$\sqrt{1-4n^3y}=t$$

$$dy=-\frac{t}{2n^3}dt$$

$$=3n^2\pi\int_1^0 t\left(-\frac{t}{2n^3}\right)dt$$

$$=\frac{3\pi}{2n}\int_0^1 t^2dt=\frac{\pi}{2n}$$

(2)

$$a_n = V_{n+1} + V_{n+2} + V_{n+3} + \cdots + V_{2n}$$

$$= \pi \left\{ \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2(n+3)} + \cdots + \frac{1}{2(n+n)} \right\}$$

$$= \pi \left\{ \frac{\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)} + \frac{\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{2}{n}\right)} + \frac{\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{3}{n}\right)} + \cdots + \frac{\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{n}{n}\right)} \right\}$$

$$= \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\left(1+\frac{k}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pi \int_0^1 \frac{1}{2(1+x)} dx = \pi \frac{1}{2} \left[\log(1+x)\right]_0^1 = \frac{1}{2} \pi \log 2$$