

(問題 18)

k を定数とする。 $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に関して

$A^8 - A^7 - 4A^6 + 4A^5 + 3A^2 - 6A$ を計算せよ。

(解答)

(解法のテクニック)

ケーリー・ハミルトンの定理より $A^2 - 2A + E = 0$

(与式) = $(A^2 - 2A + E)Q + pA + qE$ の形に持ち込むと、 $A^2 - 2A + E = 0$ より

(与式) = $pA + qE$ となる。

行列の多項式は

行列 A を整式の x に、単位行列 E を整式の定数 1 とおいて、 x の多項式における。

$$\begin{array}{r} x^6 + x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 3x \\ x^2 - 2x + 1 \overline{) x^8 - x^7 - 4x^6 + 4x^5 + 3x^2 - 6x} \\ x^8 - 2x^7 + x^6 \\ \hline x^7 - 5x^6 + 4x^5 \\ x^7 - 2x^6 + x^5 \\ \hline -3x^6 + 3x^5 \\ -3x^6 + 6x^5 - 3x^4 \\ \hline -3x^5 + 3x^4 \\ -3x^5 + 6x^4 - 3x^3 \\ \hline -3x^4 + 3x^3 + 3x^2 \\ -3x^4 + 6x^3 - 3x^2 \\ \hline -3x^3 + 6x^2 - 6x \\ -3x^3 + 6x^2 - 3x \\ \hline -3x \end{array}$$

上記の割り算より

$$A^8 - A^7 - 4A^6 + 4A^5 + 3A^2 - 6A = (A^2 - 2A + E)Q - 3A + 0E$$

$$= -3A + 0E = -3 \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3k \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$