

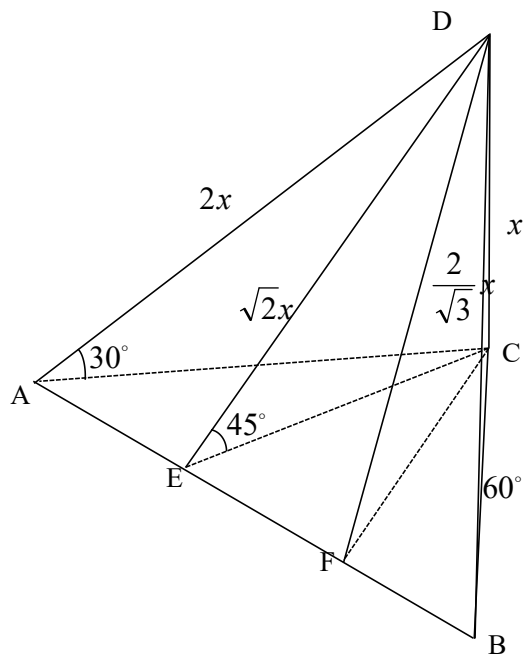
(問題 1 4 7)

三角錐 ABCD において辺 CD は底面 ABC に垂直である。AB=3 で、AB 上の 2 点 E,F は AE=EF=FB=1 を満たし、 $\angle DAC = 30^\circ, \angle DEC = 45^\circ, \angle DBC = 60^\circ$  である。次を求めよ。

- (1) 辺 CD の長さ。  
 (2)  $\theta = \angle DFC$  とおくととき、 $\cos \theta$  の値。

(解答)

(1)

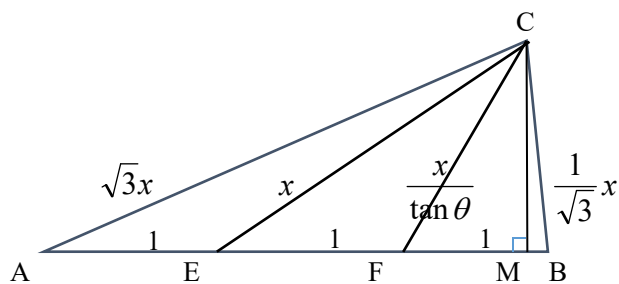


$$CA \tan 30^\circ = x \Leftrightarrow CA = \sqrt{3}x$$

$$CE \tan 45^\circ = x \Leftrightarrow CE = x$$

$$CB \tan 60^\circ = x \Leftrightarrow CB = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$CF \tan \theta = x \Leftrightarrow CF = \frac{x}{\tan \theta}$$



C から AB に垂線 CM を下す。

$FM = y$  とおくと

$$CM^2 = \left( \frac{x}{\tan \theta} \right)^2 - y^2 = \frac{x^2}{3} - (1-y)^2 = x^2 - (1+y)^2 = 3x^2 - (2+y)^2$$

$$4y = \frac{2}{3}x^2 \Rightarrow 6y = x^2$$

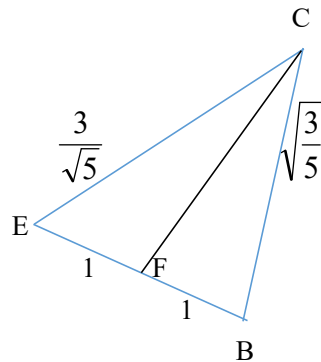
$$(2+y)^2 - (1+y)^2 = 2x^2 \Rightarrow 3+2y = 2x^2$$

$$3 + \frac{x^2}{3} = 2x^2$$

$$9 + x^2 = 6x^2 \quad \text{より}$$

$$\therefore CD = x = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

(2)



三角形 CBE において、中線定理より

$$CE^2 + CB^2 = 2(CF^2 + EF^2)$$

$$\left( \frac{3}{\sqrt{5}} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \right)^2 = 2(CF^2 + 1^2)$$

$$CF = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \angle ABD = \frac{3^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2}{2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{\frac{3}{5}}} = \frac{9 + \frac{12}{5} - \frac{36}{5}}{12\sqrt{\frac{3}{5}}} = \frac{45 + 12 - 36}{12\sqrt{15}} = \frac{21}{12\sqrt{15}} = \frac{7}{4\sqrt{15}}$$

$$DF^2 = \left(2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{\frac{3}{5}} \frac{7}{4\sqrt{15}} = \frac{12}{5} + 1 - \frac{7}{5} = 2$$

$$DF = \sqrt{2}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{CF}{DF} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$