数学Ⅰ　　解法のテクニック

1. 対称式：互いに文字を入れ替えても，もとの式と同じになる式。
   a, b, cの対称式が$a+b, b+c, c+a$のうち一つを因数にもつならば$(a+b)(b+c)(c+a)$を因数にもつ。
2. 交代式：互いに文字を入れ替えても，符号だけが入れ替わる式
   a, b, cの交代式は$a-b, b-c, c-a$のうち一つを因数にもつならば$(a-b)(b-c)(c-a)$を因数にもつ。
3. $x^2-x+1=0$ ならば$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)=0$ より
   $x^3=-1$
4. （注意）不等式$(x-1)^2(x-9)\geq 0$　は$x=1$　も解である。
5. x, y, zのうち少なくとも 1 つは 1 $\Rightarrow (x-1)(y-1)(z-1)=0$
6. 2 の関数が共通な因数をもつ。→共通因数$(x-\alpha)$をもつとおく。
7. 加比の理

   $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき $\dfrac{x}{a}=\dfrac{x+y+z}{a+b+c}$　　　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ ならば $\dfrac{pa+qc}{pb+qd}$
8. $a>0, b>0$ のとき$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$
   $a>b>0$ のとき　$\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$
9. x^n-1:nが正の奇数のとき$x-1$ が因数。正の偶数のときはx^2-1 が因数。
   x^n+1:nが正の奇数のとき$x+1$ が因数。
10. $0<x\leq y$のとき $\dfrac{x}{1+x}\leq\dfrac{y}{1+y}$
11. aが 2 数α，βの間にあることの証明。$\Rightarrow (a-\alpha)(a-\beta)<0$ を証明すればいい。
12. 方程式が有理数解を持たないことの証明
    →有理数解を持つと仮定し代入して矛盾を背理法で導く。
13. 2 つの 2 次方程式$\begin{cases} f(x,a)=0 \\ g(x,a)=0 \end{cases}$が共通の 0 でない解をもつとき$a$の値と共通解を求めよ。
    →共通解をαとして，αとaの連立方程式と考える。
14. a, bが異なる。$\rightarrow a\neq b \rightarrow a-b\neq 0 \rightarrow a-b$で割れる。
15. ユークリッドの互除法
    自然数aを自然数bで割ったときの余りをrとすると，aとbの最大公約数はbとrの最大公約数と一致する。
16. 因数定理を用いて整式の因数を見つけるには
    ±（定数項の約数）/（最高次の係数の約数）　が因数の候補。

17.　三角形の存在条件

$|b-c|<a<b+c$

18. n次以下の整式$P(x), Q(x)$について$P(x)=Q(x)$が異なる$n+1$個の値について成り立つ。

$\Leftrightarrow$ $P(x)=Q(x)$は恒等式。

19. $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$ならば，$a=c, b=d$。複素数と同じ扱いができる。

20.（注意）1は素数ではない。

21. 有理係数のn次方程式が$p+q\sqrt{r}$を解にもつならば$p-q\sqrt{r}$も解にもつ。

22. 領域Dにおける最大，最小値を求める問題。

（解法のテクニック）

$f(x,y)$をkとおいて$f(x,y)=k$がDと共有点をもつようなkの範囲を求める。

23.　$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$(x+y)(y+z)(z+x)=(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz$

$x(y-z)^2+y(z-x)^2+z((x-y)^2=(x+y+z)(xy+yz+zx)-9xyz$

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

24.　$\sqrt{7}$が無理数であることの証明。

（解法のテクニック）

$\sqrt{7}=\dfrac{l}{k}$ $(k, l$は互いに素）（有理数）と仮定して矛盾を導く。

25.　条件付き最大値，最小値を求める問題。

条件式が$f(x,y)=0$のとき$g(x,y)$の最大値、最小値を求める。

（解法のテクニック）

［解法 1］　$f(x,y)=0$からyをxで表して$g(x)$の最大値，最小値を求める。

［解法 2］　連立方程式$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=k \end{cases}$が実数解をもつ$k$の最大，最小を考える。

［解法 3］　$f(x,y)=0$と$g(x,y)=k$　が共有点をもつkの値の範囲を求める。

26. 2つの正の整数x, yの和，積が一定のとき

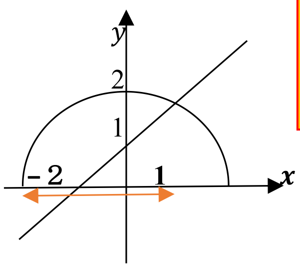
$x+y$が一定$\Rightarrow$ xyは$x=y$のとき最大値$x+y$をとる。

xyが一定$\Rightarrow$ $x+y$は$x=y$のとき最小値xyをとる。

27．不等式

$1+x \leq \sqrt{4-x^2}$

（答え）$-2 \leq x \leq 1$



（解法のテクニック）

不等式は図を用いて解くことができる。

28.　関数の最大，最小を求める問題。

$y=(x^3-3x)^2-9(x^3-3x)\quad(1 \leq x \leq 4)$

(解法のテクニック)

$x^3-3x=t$とおく。$y=t^2-9t$（$-2 \leq t \leq 52$)