(問題１９８)

$a$を実数とする。曲線 $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$ を$C$，直線 $y=ax+3a+1$を$l$とする。

(1) 直線$l$は$a$によらず，定点 P を通る。P の座標を求めよ。

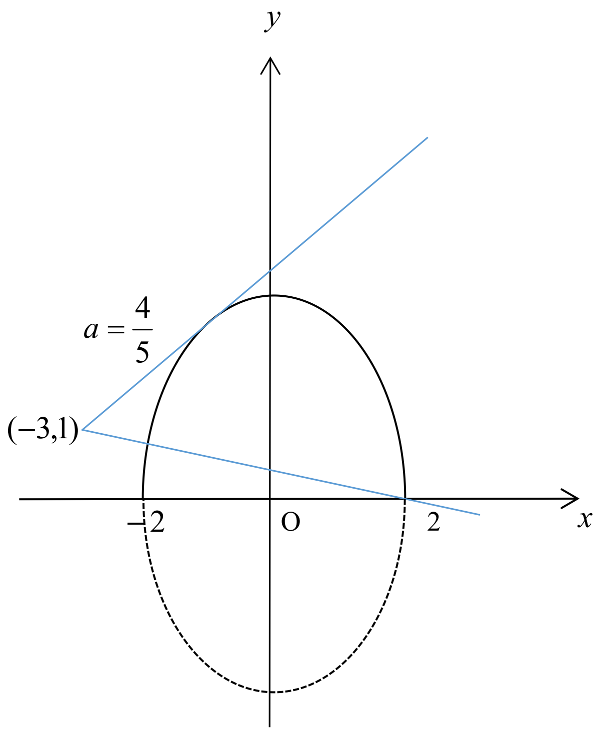
(2) $C$と$l$が異なる 2 点を共有するときの$a$の値の範囲を求めよ。

(解答)

(1)

$$y=ax+3a+1$$
$$=a(x+3)+1$$
$$\therefore P(-3,1)$$

(2)




$$y=\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$$
$$y^2=\frac{9}{4}\left(4-x^2\right)=9-\frac{9}{4}x^2$$
$$\frac{y^2}{9}=1-\frac{x^2}{4}$$
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

$y=ax+3a+1$を代入して

$$\left(ax+3a+1\right)^2=9-\frac{9}{4}x^2$$
$$4\left(ax+3a+1\right)^2=36-9x^2$$
$$4(a^2x^2+9a^2+1+6a^2x+2ax+6a)=36-9x^2$$
$$(4a^2+9)x^2+4(6a^2+2a)x+36a^2+24a-32=0$$
$$D/4=4^2(3a^2+a)^2-(4a^2+9)(36a^2+24a-32)=0$$
$$16(9a^4+6a^3+a^2)-(4\cdot 36a^4+4\cdot 24a^3-4\cdot 32a^2+9\cdot 36a^2+9\cdot 24a^2-9\cdot 32)=0$$
$$-180a^2-9\cdot 24a+9\cdot 32=0$$
$$5a^2+6a-8=0$$
$$(5a-4)(a+2)=0$$
$$a=\frac{4}{5}$$

図より $-\dfrac{1}{5}\le a<\dfrac{4}{5}$