（問題２１７）

(1) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に対し，$\sin 2\theta=\cos 3\theta$ が成立している。このとき，$\sin\theta$ の値を求めよ。

(2) 有理数 a,b が等式 $\cos\dfrac{\pi}{12}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ を満たすとき，a,b の値を求めよ。

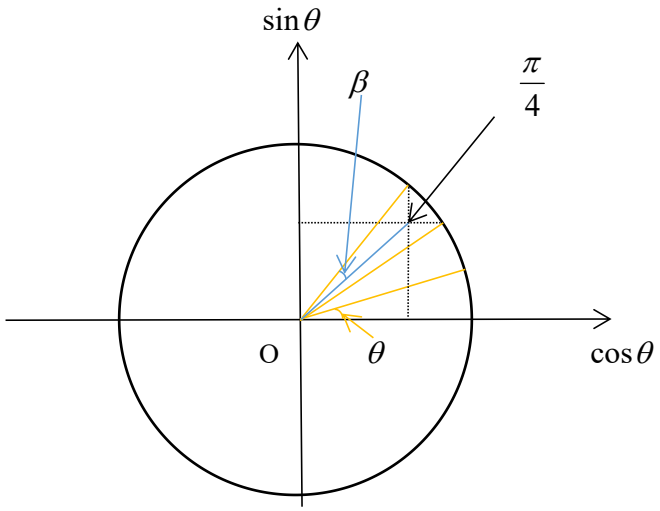
（解答）

(1)

$\sin 2\theta=\cos 3\theta$

図より $2\theta<\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow\theta<\dfrac{\pi}{8}$

図より $\sin 2\theta=\cos 3\theta\Rightarrow 2\theta=\dfrac{\pi}{4}-\beta,3\theta=\dfrac{\pi}{4}+\beta$



図より $2\theta=\dfrac{\pi}{4}-\beta,3\theta=\dfrac{\pi}{4}+\beta$ のとき

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$$

$$2\theta=\frac{\pi}{4}-\beta\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{8}-\frac{\beta}{2}$$

$$3\theta=\frac{\pi}{4}+\beta\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{12}+\frac{\beta}{3}$$

$$\frac{\pi}{8}-\frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{12}+\frac{\beta}{3}$$

$$3\pi-12\beta=2\pi+8\beta$$

$$\pi=20\beta$$

$$\beta=\frac{\pi}{20}$$

$$2\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{20}$$

$$\theta=\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{40}=\frac{5-1}{40}\pi=\frac{\pi}{10}$$

$$\therefore\sin\theta=\sin\frac{\pi}{10}$$

(2)

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{\frac{3}{8}}$$

$$\therefore(a,b)=\left(\frac{1}{8},\frac{3}{8}\right),\left(\frac{3}{8},\frac{1}{8}\right)$$