（問題３０１）

$\dfrac{d}{dx}\log\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}$ を求めよ。

（問題３０２）

$f(x)$ は，$x>0$ において定義され，$f(x)>0$ かつ微分可能で，

$\lim_{x\to\infty} f'(x)=\infty$ を満たすものとする。曲線 $y=f(x)$ 上の任意の点 $\left(t, f(t)\right)$ における接線 T_t が x 軸の正の部分（正の向き）となす角を θ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) 任意の正の数 x に対して，$\lim_{t\to\infty}\tan\left(\theta(t)-\theta(x)\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}$ が成り立つとき，

$f(x)$ が満たす微分方程式を求め，それを解け。ただし，$f(1)=1$ とする。

(2) 接線 $T_a, T_b\ (a<b)$ の交点を中心として，T_a を正の方向（反時計回り）に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させる。このとき T_a が T_b に重なるための a, b の関係式を求めよ。

（問題３０３）

関数 $f(x)=\dfrac{x}{\tan x}\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right), g(x)=\sin x (0\leq x\leq \pi)$ とする。

(1) 曲線 $y=f(x)$ の概形をかけ。

(2) 区間 $\left[0,\pi\right]$ を n 等分して，その分点を順に，$x_0, x_{1,} x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n=\pi$ とおき，

$y_k=g(x_k) (k=0,1,2,\cdots,\pi)$ とおく。$k=0$ から $k=n$ まで点 $P_k\left(x_k, y_k\right)$ を順に結んだ折れ線

と x 軸とで囲まれる部分の面積 A_n を公式 $2\sin\dfrac{\theta}{2}\sin k\theta=\cos\left(k-\dfrac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\theta$ を利用して求めよ。

（問題３０４）

(1)1 辺の長さ a の正 3 角形の中で，同じ半径の円が 21 個互いに，かつ正 3 角形の３辺に対しても内接している。円の半径を a で表せ。

(2)1 辺の長さが a の正 4 面体の中で，(1)で求めた半径の球が互いに，かつ正 4 面体の 4 面に内接している。内接球の個数を求めよ。

（問題３０５）

$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数 $y=\dfrac{\pi}{4}\tan x$ の逆関数を $y=f(x)$ で表す。このとき 2 つの関数 $y=\dfrac{\pi}{4}\tan x, y=f(x)$ のグラフで囲まれる図形の面積を求めよ。

（問題３０６）

点 $A(0,1)$ から出発して曲線 $y=\dfrac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$ の上（ただし，$x\geq 0$) を毎秒 1 の速さで動く点 P を考えるとき，次の問いに答えよ。

(1) t 秒後の点 P の座標を t で表せ。

(2) 点 P から x 軸に引いた垂線と x 軸との交点 Q の動く速さを t で表せ。

（問題３０７）

平面上の曲線 C が t を媒介変数として

$x=2\cos t+\cos 2t, y=2\sin t-\sin 2t$

で与えられている。ただし，$0\leq t\leq \dfrac{2}{3}\pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C 上にあり，原点に最も近い点の座標を求めよ。

(2) 曲線 C の長さを求めよ。

（問題３０８）

曲線 $C_1: y=\log(x+1)$ と曲線 $C_2: y=\sqrt{\left((\log 2)^2+1\right)x^2-1}$ において次の問いに答えよ。

(1) C_1 と C_2 の交点の座標を求めよ。

(2) C_1 と C_2 と x 軸とで囲まれる図形を x 軸の周りに回転してできる回転体の体積を求めよ。

（問題３０９）

$\int \log x^2 dx$ を求めよ。

（問題３１０）

$y=\tan\dfrac{x}{2}$ と $y=\left(\sqrt{2}-1\right)\log\left(x+e-\dfrac{\pi}{4}\right)$ において，２曲線が２つの交点を持つことを示せ。

（問題３１１）

微分方程式 $\frac{dy}{dx}x+y=0(x>0,y>0)$ を満たす曲線の方程式を求めよ。ただし，$x=1$ のとき $y=1$ である。

（問題３１２）

双曲線 $C:\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$ と円 $O:x^2+(y-p)^2=3(p>0)$ が 2 点で接している。p の値と接点の座標を求めよ。

（問題３１３）

双曲線 $C:\frac{x^2}{16}-y^2=1$ と円 $O:(x-p)^2+y^2=9(p>0)$ が 2 点で接しているとき，p の値と接点の座標を求めよ。

（問題３１４）

双曲線 $C:x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ と円 $O:x^2+(y-p)^2=r^2(p>0,r>0)$ が２2 点で接している。このとき p と接点の y 座標は $p=\frac{5}{4}y$ の関係を満たしている。このとき b の値を求めよ。

（問題３１５）

a,b をある実数とし，$I=\int_a^b e^{-x}\sin x dx, J=\int_a^b e^{-x}\cos x dx$ とする。

(1)2 つの等式 $I-J=e^{-a}\sin a-e^{-b}\sin b, I+J=e^{-a}\cos a-e^{-b}\cos b$ が成り立つことを示せ。

(2) n を正の整数とし，区間 $\left[(n-1)\pi, n\pi\right]$ において，関数 $y=e^{-x}\sin x$ のグラフと x 軸とで囲まれた部分の面積 A_n を求めよ。

(3) $A_n(n=1,2,\cdots)$ の総和 $S=\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ を求めよ。

（問題３１６）

$k=1,2,\cdots,n$ に対して，２曲線

$$y=2k\sin x, y=\sin\frac{x}{2}(0\le x<\pi)$$

によって囲まれた部分の面積を S_k とするとき，不等式

$$\frac{1}{4}\log(n+1)<\sum_{k=1}^{n}S_k-2n^2<\frac{1}{4}(1+\log n)$$

が成り立つことを示せ。

（問題３１７）

楕円 $C_1:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ と双曲線 $C_2:x^2-4y^2=1$ と y 軸に接する円の半径を求めよ。

（問題３１８）

$x^2+y^2\le z^2, z\le 1$ で囲まれる部分の立体の体積を求めよ。

（問題３１９）

楕円 $C_1:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ と双曲線 $C_2:x^2-4y^2=-1$ と x 軸に接する円の半径を求めよ。

（問題３２０）

楕円 $C_1:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ と放物線 $C_2:y=x^2$ と x 軸に接する円の半径を求めよ。ただし,円の中心の x 座標は 0 でないとする。

（問題３２１）

４点 A,B,C,D がこの順で半径 a の同一円周上にある。点 P が $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=0$ を満たしながら動くとき立体 ABCDP の体積の最大値を求めよ。

（問題３２２）

放物線 $C_1:y=x^2$ と放物線 $C_2:y=x^2+4$ に接する円の半径を求めよ。

（問題３２３）
三角形 ABC の B から AC に垂線 BP を下ろす。C から AB に垂線 CQ を下ろす。
三角形 BCQ と三角形 BCP の面積の和が最大になるとき，三角形 ABC はどのような三角形か。

（問題３２４）

$\int x\log\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)dx$ を求めよ。

（問題３２５）

$\int \cos x\log|\sin x|dx$ を求めよ。

（問題３２６）

４次関数 $y=2x^4-11x^3+14x^2$ と２次関数 $y=-8x^2+19x-6$ の接点の x 座標を求めよ。

（問題３２７）

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)(\log x)dx$ を求めよ。

（問題３２８）

$\int_{1}^{\frac{1}{2}} x\tan\left(x^2-\frac{1}{4}\right)dx$ を求めよ。

（問題３２９）

p,q を素数とする。x についての２次方程式 $4x^2-4(p+q)x+p^2=0$ が有理数解をもつような p,q の値と，有理数解を求めよ。

（問題３３０）

k を正の定数とし，$2k\pi\le x\le(2k+1)\pi$ で定義された２曲線 $C_1:y=\cos x, C_2:y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ を考える。

(1) C_1 と C_2 は共有点を持つことを示し，その点における C_1 の接線は点 $(0,1)$　を通ることを示せ。

(2) C_1 と C_2 の共有点はただ１つであることを証明せよ。

（問題３３１）

数列 $\{x_n\}$ が単調増加であることはすべての n について $x_n \leq x_{n+1}$ となることであり，単調減少であるとはすべての n について $x_n \geq x_{n+1}$ となることである。また，数列 $\{x_n\}$ が有界であるとはある数 M が存在してすべての n について $|x_n| \leq M$ となることである。なお, 数列 $\{x_n\}$ は，単調増加かつ有界なとき，または単調減少かつ有界なときには収束することが知られている。級数

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{k+1}\frac{1}{k}+\cdots$ に対して，S_n, O_n, E_n を次のようにおく。

$S_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ （第 n 項までの和）

$O_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2n-1}$ （奇数 $2n-1$ 項までの和）

$E_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2n}$ （偶数 $2n$ 項までの和）

(1) 数列 $\{E_n\}$ が単調増加数列であることを示せ。

同様にして数列 $\{O_n\}$ が単調減少であることが示せる。

(2) すべての m, n について $E_m < O_n$ であることを示せ。

(3) 数列 $\{E_n\}$ が収束することを示せ。

同様にして数列 $\{O_n\}$ が収束することが示せる。

(4) $\lim_{n\to\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} O_n$ を示せ。

以上より数列 $\{S_n\}$ の収束が示せるので，級数

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{k+1}\frac{1}{k}+\cdots$ は収束する。

（問題３３２）

関数 $y=x\log x (x>0)\cdots$①について，次の問いに答えよ。

(1) ①の増減，極値，凹凸を調べて，そのグラフの概形をかけ。

（必要であれば， $\lim_{x\to+0} x\log x=0$ を用いてもよい。）

(2) 曲線①上の点 (e,e) における①の接線 l，曲線①および x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

（問題３３３）

曲線 $C: y=x^2$ を行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ で表される１次変換で移して得られる曲線 C' について，

(1) 曲線 C' の方程式を求めよ。

(2) ２曲線 C, C' の交点を求めよ。

(3) ２曲線 C, C' によって囲まれる図形の面積を求めよ。

（問題３３４）
次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\log(1+x^2)dx$

(2) $\int_0^t x^3 e^{-x^2} dx$

（問題３３５）

n を自然数とする。$\frac{1}{n!}\int x^n e^{-x} dx = P_n(x)e^{-x}+C$ （C は積分定数）となる多項式 $P_n(x)$ を求めよ。

（問題３３６）

放物線 $y=x^2$ を y 軸の周りに回転してできる（十分大きな）容器に水を注ぐ。ただし，y 軸の方向を鉛直方向とする。水の深さが $h(>0)$ のとき，水の体積 V は

$V=\pi\int_0^{ア\boxed{}}$ イ $\boxed{}\,dy=\pi$ ウ $\boxed{}$ …①で与えられる。容器の底に小さな栓があり，時刻 $t=0$ で水を注ぐのをやめ栓を開いて水を流す。$t=0$ における水の深さを h_0 とし，時刻 t における水の体積，深さをそれぞれ $V(t),h(t)$ で表す。$\left(h(0)=h_0\right)$。

流出する水の，時刻 t における体積変化率が $h(t)$ に比例するとし，その比例定数を a とする。容器内の水は流出するのであるから

$\dfrac{dV}{dt}=$ エ $\boxed{}$ … ②である。また，①から解るように

$\dfrac{dV}{dt}=\pi$ オ $\boxed{}\cdot\dfrac{dh}{dt}$ …③である。②，③より $h(t)$ の満たす微分方程式

$\dfrac{dh}{dt}=$ カ $\boxed{}$ …④が得られる。④の解は一般に C を定数として

$h(t)=$ キ $\boxed{}+C$ と書ける。

$h(0)=h_0$ によって C を定めると $C=$ ク $\boxed{}$ であるから

$h(t)=$ ク $\boxed{}+$ キ $\boxed{}$ $,V(t)=$ ケ $\boxed{}$ $(0\le t\le T)$ である。

ただし，容器が空になるまでの時間を T とした。

これは h_0 を使って，$T=$ コ $\boxed{}$ と表せる。また，水の体積が $t=0$ の時の半分となる時刻は T を使って表せば，サ $\boxed{}$ である。

（問題３３７）

同一平面上にない４点 A，B，C，D に対して O を四面体 ABCD の内部の点とし，４頂点 A，B，C，D の位置ベクトルを $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c},\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ と表す。

(1) 点 P が平面 ABC 上にあるための必要十分条件は，$p+q+r=1$ を満たす p,q,r が存在して，$\overrightarrow{OP}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$ と表せることである。これを証明せよ。

(2) $a_1,b_1,c_1,d_1,a_2,b_2,c_2,d_2$ を 0 でない定数とするとき，

$a_1\vec{a}+b_1\vec{b}+c_1\vec{c}+d_1\vec{d}=\vec{0},a_2\vec{a}+b_2\vec{b}+c_2\vec{c}+d_2\vec{d}=\vec{0}$

が同時に成り立つならば

$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}=\dfrac{d_1}{d_2}$ であることを証明せよ。

(3) A_1,B_1,C_1,D_1 をそれぞれ平面 BCD，CDA，DAB，ABC 上の点とする。

ある正の定数 k に対して

$\overrightarrow{OA_1}=-k\vec{a},\overrightarrow{OB_1}=-k\vec{b},\overrightarrow{OC_1}=-k\vec{c},\overrightarrow{OD_1}=-k\vec{d}$

が成り立つとき，k の値を求めよ。

（問題３３８）

(1) $0<x<\pi,0<y<\pi$ のとき $\sin(x+y)<\sin x+\sin y$ を示せ。

(2) $x>0,y>0,z>0$ で $x+y+z<\pi$ のとき

$\sin(x+y+z)<\sin x+\sin y+\sin z$ を示せ。

（問題３３９）

xyz 空間内で，$0<a<1$ である実数 a に対し，$A(0,0,0),B(1-a,0,0),C(0,1,a)$ を頂点とする三角形を考える。この三角形を z 軸の周りに１回転してできる立体の体積を最大にする a の値を求めよ。またそのときの体積を求めよ。

（問題３４０）

球$S: x^2+y^2+z^2=1$上の点$P(a,b,c)$を通る平面

$a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)=0$と点$(2,1,1)$の距離を$d(P)$とする。

(1) $d(P)$をa,b,cで表せ。

(2) 正の数rに対して，球S上の点Pで$d(P)=r$となるもの全体が１つの円となるという。このようなrの値の範囲を求めよ。

（問題３４１）

正四面体の４つの頂点を A,B,C,D とする。s,tを$0<s<1, 0<t<1$を満たす整数とし

線分 AB を$s:(1-s)$に内分する点を E,

線分 AC を$t:(1-t)$に内分する点を F,

線分 AD を$t:(1-t)$に内分する点を G

とおく。３点 E,F,G を通る平面が，３点 B,C,D を通る円と共有点を持つためにs,tの満たすべき条件を求め，点(s,t)の範囲を平面上に図示せよ。

（問題３４２）

nが１より大きい整数のとき，$f(n)=\dfrac{-5n+149}{n-1}$が整数になる$n$は何個あるか。また，そのうち$f(n)$が正の整数になるものは何個あるか。

（問題３４３）

空間の零ベクトルでない２つのベクトル$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$と$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$が垂直であるとき，$\vec{p}=\overrightarrow{OP}$に対して$\vec{q}=\overrightarrow{OQ}$が$\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a}+\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\vec{b}$に等しいとする。

(1) $\left(\vec{p}-\vec{q}\right)\cdot\vec{a}=0, \left(\vec{p}-\vec{q}\right)\cdot\vec{b}=0$となることを示せ。

(2) $\left|\vec{q}\right|\le\left|\vec{p}\right|$となることを示せ。

(3) ３点 O,A,B を通る平面上の点 R が点 Q と異なるとき，$\vec{r}=\overrightarrow{OR}$ に対して

$|\vec{r}-\vec{p}|>|\vec{q}-\vec{p}|$ が成り立つことを示せ。

（問題３４４）
直角三角形でない三角形 ABC と，その内部の点 P があって，

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$ を満たしている。

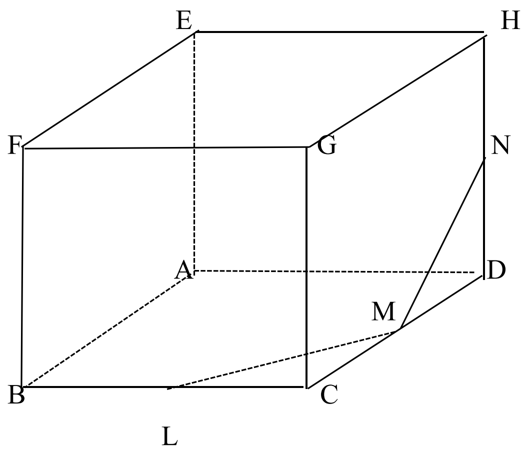
(1) 線分 PA，PB，PC は，それぞれ，辺 BC，CA，AB に垂直であることを示せ。

(2) $\dfrac{|\overrightarrow{PA}|}{\cos A}=\dfrac{|\overrightarrow{PB}|}{\cos B}=\dfrac{|\overrightarrow{PC}|}{\cos C}$ が成り立つことを示せ。

(3) 三角形 ABC の３辺 BC，CA，AB の長さが，それぞれ，6，6，4 であるとき，
(2) の等式を用いて，線分 PA，PB，PC の長さを求めよ。

（問題３４５）
立方体 ABCD－EFGH の辺 BC，CD，DH の中点を，それぞれ L，M，N とする。このとき，

$\angle LMN=$ ア$\boxed{}$， $LN^2=$ イ$\boxed{}$ AB^2 である。



（問題３４６）
三角形 ABC に対して，その内接円の半径を 1，三角形 ABC の面積をV とする。
半径d の円の中心がこの三角形の周上を動くとき，その円が通る図形をS とする。
ただし，$0<d<1$とする。

(1) $\angle A=\alpha,\angle B=\beta,\angle C=\gamma$ として，V をα,β,γ で表せ。

(2) S の面積をV とd で表せ。

（問題３４７）

k を実数の定数として，x についての無理方程式 $\sqrt{x+1}=x+k\cdots$①を考える。

(1) 無理方程式①が重解をもつための k の値を求めよ。
(2) 無理方程式①が異なる２つの解をもつための k の値の範囲を求めよ。
(3) 無理方程式①が重解でないただ 1 つの解をもつとき，その解を k を用いて表せ。

（問題３４８）

100 個の実数からなる数列 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{100}\}$ がある。

(1) 数列 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{100}\}$ が初項 a，公差 d の等差数列であるとき，

$a_1+a_2x+\cdots+a_{100}x^{99}$ を求めよ。

(2)
１以外の全ての実数 x に対して

$$a_1+a_2x+\cdots+a_{100}x^{99}=\frac{A+Bx+Cx^{100}+Dx^{101}}{1-2x+x^2}$$

が成り立つとき, 数列 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{100}\}$ は等差数列となることを示し, 初項, 公差, および C,D

を A,B を用いて表せ。