数学C　　行列　　解法のテクニック

【点の移動】

1.　原点や原点を通る直線に関する対称移動は1次変換である。

[原点]	[x 軸]	[y 軸]	[$y=x$]	[$y=-x$]
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$(a,b)\to(-a,-b)$	$(a,b)\to(a,-b)$	$(a,b)\to(-a,b)$	$(a,b)\to(b,a)$	$(a,b)\to(-b,-a)$

【行列 A^n の計算】

(1) $A^k=E$ のとき

$$A^n=A^{n-k}A^k=A^{n-k}$$

(2) A が回転行列のとき

$$A^{n+1}=\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos(n+1)\theta & -\sin(n+1)\theta \\ \sin(n+1)\theta & \cos(n+1)\theta \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^n=\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

(3) $(A-\alpha E)^2=0$ のとき

$A-\alpha E=B$ とおくと

$A^n=(B+\alpha E)^n$

２項定理より

$$=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k B^k(\alpha E)^{n-k}$$

$$={}_nC_0B^0(\alpha E)^n+{}_nC_1B^1(\alpha E)^{n-1}+{}_nC_2B^2(\alpha E)^{n-2}+\cdots$$

$B^2=0$ より $B^3,B^4,B^5\cdots=0$ より

$$={}_nC_0\alpha^nE+{}_nC_1B\,\alpha^{n-1}$$

$$=\alpha^nE+nB\,\alpha^{n-1}$$

(4) B^n がわかっていて，かつ $B = PAP^{-1}$ のとき

$B^n = PAP^{-1}PAP^{-1}\cdots PAP^{-1}$
$= PA^nP^{-1}$
$\therefore A^n = P^{-1}B^nP$

(5) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ のとき

$$A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$$

(6) $A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ のとき

$$A^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1}\gamma \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$$

(7)ケーリー・ハミルトンの定理の利用

$A^n = \{A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E\}Q + pA + qE$
$= pA + qE$

行列の式を x の高次多項式とみなして，

x^n を $x^2 - (a+d)x + (ad-bc)$ で割る。

行列の成分の等式の解き方

(解法のテクニック)

① $a^2 = b^2 \to a = b, a = -b$ の場合わけ。

② $= 0$ と $\neq 0$ の場合わけ。
③ $ab = 2$ や c = 1 などの具体的な数字を代入してみる。

【固有値，固有ベクトル】

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$A\vec{x}=k\vec{x}(\vec{x}\neq\vec{0})$ となる k を A の固有値，$\vec{x}$ を A の固有ベクトルという。

$$(A-kE)\vec{x}=\vec{0}$$

$A-kE$ は逆行列をもたないから，
固有方程式

$$\Delta(A-kE)=0$$

$$\Delta\begin{pmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{pmatrix}=(a-k)(d-k)-bc=0$$

k ：固有値

（例） $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

固有方程式は

$$(2-k)(3-k)-2=0$$

$$k^2-5k+4=0$$

$$(k-1)(k-4)=0$$

$$k=4,1$$

$$A-4E=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, A-E=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

固有値 4 の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，固有値 1 の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

【対角化】

固有ベクトル v_1, v_2 を並べた行列を $P=\left(v_1 v_2\right)$ とすると

PAP^{-1} を計算すると A を対角化できる。

固有値が重解のとき，固有ベクトルは１つより，もう１つの１次独立なベクトルを用いることによって，**上三角化**できる。

$$PAP^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=B$$

対角化した行列の対角成分は固有ベクトルの固有値になっている。

［証明］

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が異なる固有値 α,β をもつとき，α,β の固有ベクトルを $\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix},\begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}$ とする。

$$A\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}\alpha$$

$$A\begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}\beta$$

$$A\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{-1}A\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

【A^n の計算】

$$(PAP^{-1})(PAP^{-1})(PAP^{-1})\cdots(PAP^{-1})$$
$$=PA^nP^{-1}$$
$$\therefore A^n=P^{-1}B^nP=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

固有値が重解のとき

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$
$$(1-k)(5-k)+4=0$$
$$k^2-6k+9=0$$
$$(k-3)^2=0$$
$$k=3$$

$A-3E=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と１次独立なベクトルを $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

【逆行列】

1. $\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B)$

［証明］

$(AB)B^{-1}A^{-1} = E$

$\therefore (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$\Delta(AB) = \Delta(B)\Delta(A) = \Delta(A)\Delta(B)$

2. A が逆行列を持つ $\Rightarrow$ A^2 も逆行列を持つ

［証明］

$A^2 A^{-1} A^{-1} = E$

3. $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k} A^{-1}$ （k は **0** でない実数）

［証明］

$kA \dfrac{1}{k} A^{-1} = E$